فصل اول

تابع

- درس اول: توابع چند جمله ای- توابع صعودی و نزولی
- درس دوم: ترکیب توابع
- درس سوم: تابع وارون

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

بارم فصل ۱:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
۷	۲	۳

فصل ۱ درس ۱: توابع چند جمله ای- توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله ای:

*توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله ای های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله ای می نامیم.

*دامنه توابع چند جمله ای $(\mathbb{R})$است.

*بزرگترین توان متغیر در یک چند جمله‌ای، درجهٔ چند جمله‌ای خواهد بود.

چند جمله ای از درجه n:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$(a_n\neq 0)$, $n \rightarrow$ عدد صحیح نامنفی

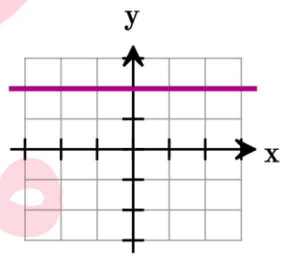
چند جمله ای درجه 0:

تابع ثابت: $f(x)=b \quad \rightarrow R=\{b\}$

مثال:

$f(x)=2$

$R=\{2\}$



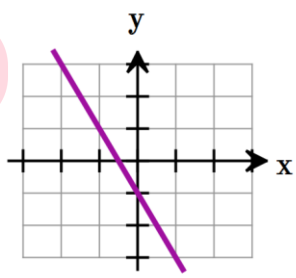
چند جمله ای درجه ۱:

تابع خطی: $f(x)=ax+b \quad \rightarrow R=\mathbb{R}$

مثال:

$f(x)=-2x-1$

$R=\mathbb{R}$

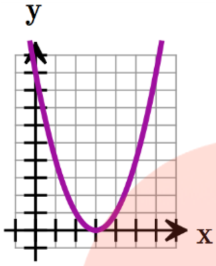


چند جمله ای درجه ۲:

تابع درجه۲: $f(x)=ax^2+bx+c$

$\rightarrow R=\left(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}\right),\left(\frac{-\Delta}{4a},+\infty\right)$

مثال:



$f(x)=x^2-6x+9$

$R=[0,+\infty)$

چند جمله ای درجه ۳:

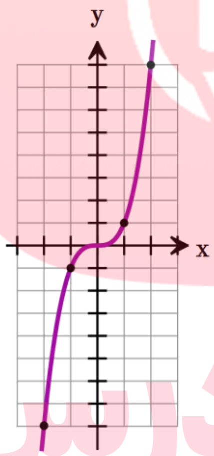
تابع درجه۳: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \rightarrow R=\mathbb{R}$

مثال:

$f(x)=x^3$

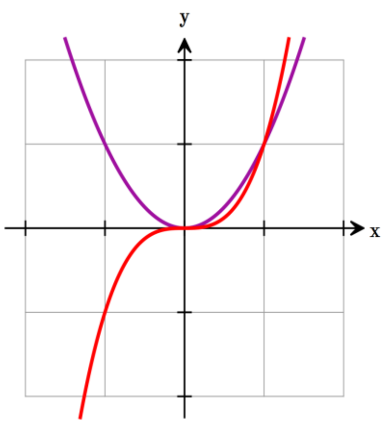
$R=\mathbb{R}$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8



(فعالیت ص ۴)

آیا برای xهای نامنفی، نمودار $y=x^3$ بالای نمودار $y=x^2$ قرار دارد؟



☑حل:

خیر ،

برای مقادیربین ۰ و۱

نمودار x^3 پایین

نمودار x^2 است

برای مقادیربزرگتر از ۱

نمودار x^3 بالای نمودار

x^2 است

مای درس
گروه آموزشی مای درس
www.my-dars.ir

مراحل رسم توابع به کمک انتقال:

*تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = af\left(bx + c\right) + d$$

۱) a, d روی عرض نقاط $\left(y\right)$ تاثیر مستقیم دارند و انتقال به صورت آسانسوری است

*اگر $a > ۱$ باشد نمودار انبساط عمودی یافته.

*اگر $۰ < a < ۱$ باشد نمودارانقباض عمودی یافته.

۲) b, c روی طول نقاط $\left(x\right)$ تاثیرمعکوس دارند و انتقال قطاری است.

*اگر $b > ۱$ باشد نمودار انقباض افقی یافته.

*اگر $۰ < b < ۱$ باشد نمودار انبساط افقی یافته.

اولویت ها:

*اول $\left(x\right)$ یا $\left(y\right)$ فرقی ندارددولی:

۱) در $\left(x\right)$ ها اول c سپس b

۲)در $\left(y\right)$ ها اول a سپس d

رسم توابع درجه ۳:

*برای رسم توابع درجه ۳ از نقطه یابی یا قوانین انتقال کمک می گیریم

(فعالیت ص۴و تمرین۱ ص۱۰)

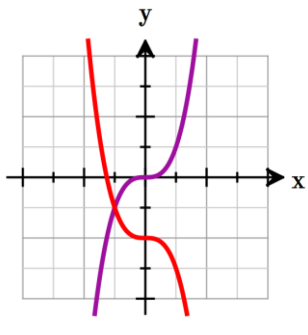
نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

۱) $y = -x^۳ - ۲$

☑حل: $\boxed{D = \mathbb{R}\ ,\ R = \mathbb{R}}$

روش اول: رسم به کمک انتقال:

نمودار $f\left(x\right) = x^۳$ را نسبت به محور x قرینه ، سپس ۲واحد به پایین منتقل می کنیم

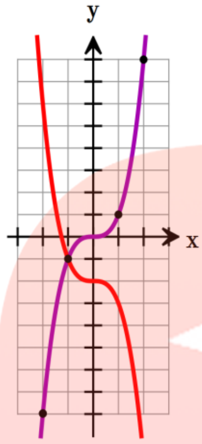


روش دوم: رسم به کمک نقطه یابی:

ابتدا جدول نقاط را رسم می کنیم سپس نقاط را روی محور مشخص و به هم وصل می کنیم.

در جدول نقاط y ها را قرینه و منهای ۲ می کنیم

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۸	-۱	۰	۱	۸

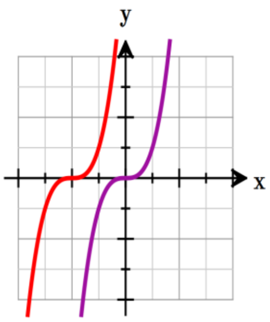


۲) $y = \left(x + ۲\right)^۳$

☑حل:

$\boxed{D = \mathbb{R}\ ,\ R = \mathbb{R}}$

نمودار $f\left(x\right) = x^۳$ را ۲ واحد به چپ منتقل می کنیم



۳) $y = -\left(x - ۲\right)^۳$

۴) $y = \left(x - ۱\right)^۳ - ۱$

۵) $y = \left(x + ۲\right)^۳ - ۲$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

(کاردرکلاس ص۵)

ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

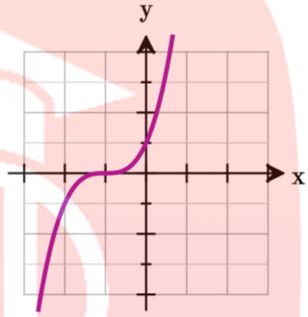
الف) $y=(x-1)^3+2$ ب) $y=(x-2)^3$

پ) $y=-x^3+1$ ت) $y=(x+1)^3-1$

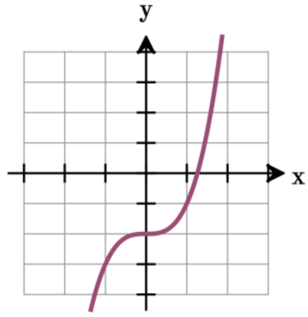
ث) $y=-x^3$ ج) $y=(x+1)^3$

چ) $y=x^3+1$ ح) $y=-x^3-1$

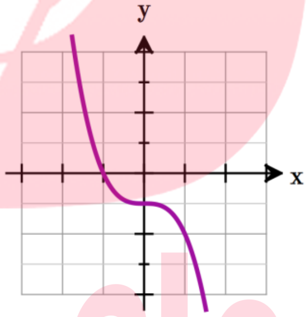
خ) $y=x^3-2$



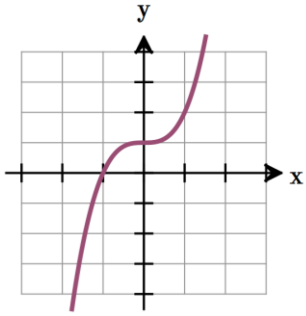
(۱)



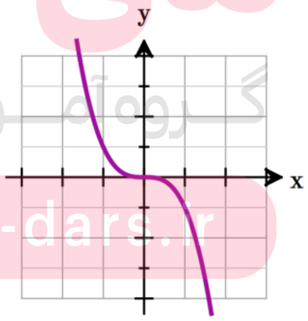
(۲)



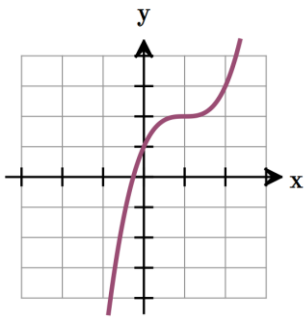
(۳)



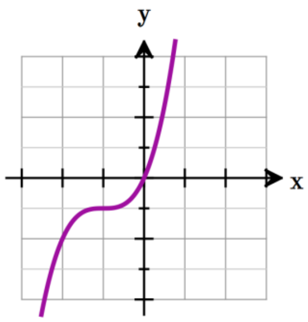
(۴)



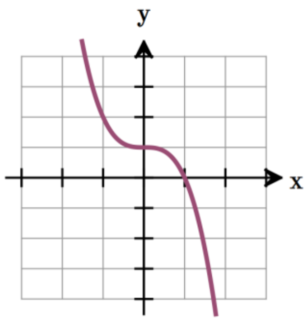
(۵)



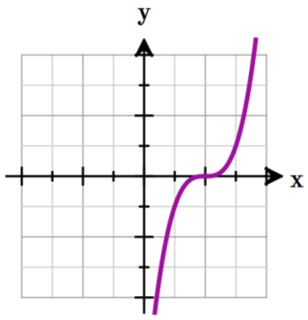
(۶)



(۷)



(۸)



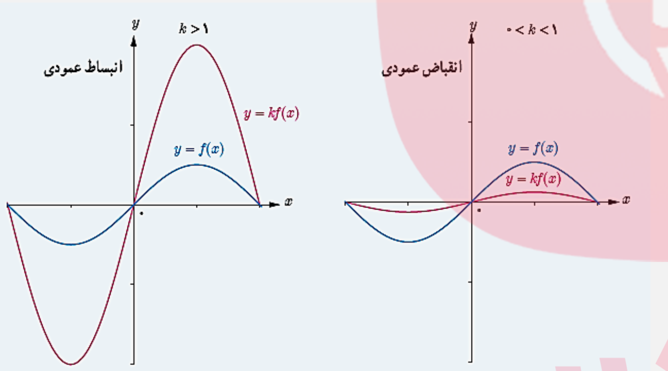
(۹)

تبدیل نمودار توابع:

۱) رسم نمودار توابع $y=kf(x)$:

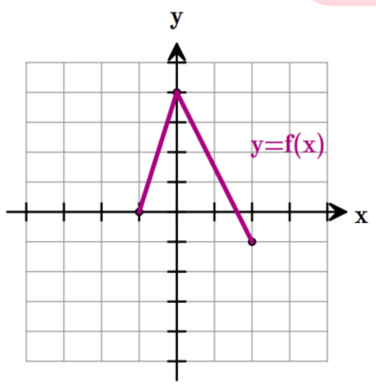
*برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم

*دامنه تابع با ضابطه $y=kf(x)$ همان دامنه تابع $y=f(x)$ است ، اما برد آنها لزوما یکسان نیست



(مثال ص ۱۵)

اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع $y=\frac{1}{2}f(x)$, $y=-f(x)$, $y=2f(x)$ را رسم کنید

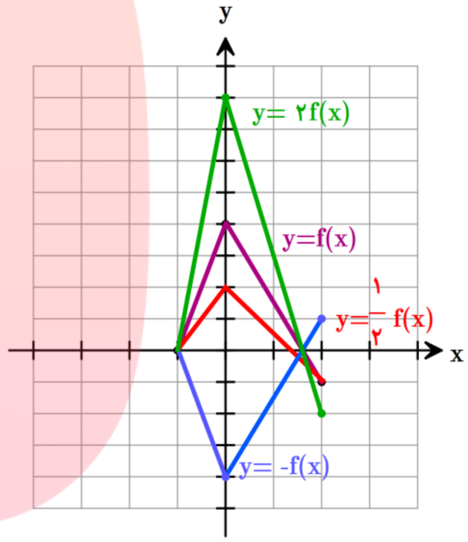


مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

☑حل:

در این سوال دامنه تغییری نمی کند فقط برد تغییر می کند.

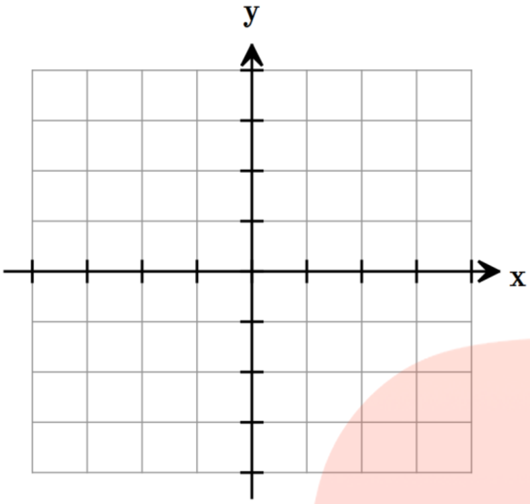
x	-۱	۰	۲	$D=[-۱,۲]$
y	۰	۴	-۱	$R=[-۱,۴]$
$y\times\frac{۱}{۲}$	۰	۲	$-\frac{۱}{۲}$	$R=\left[-\frac{۱}{۲},۲\right]$
$y\times -۱$	۰	-۴	۱	$R=[-۴,۱]$
$y\times ۲$	۰	۸	-۲	$R=[-۲,۸]$



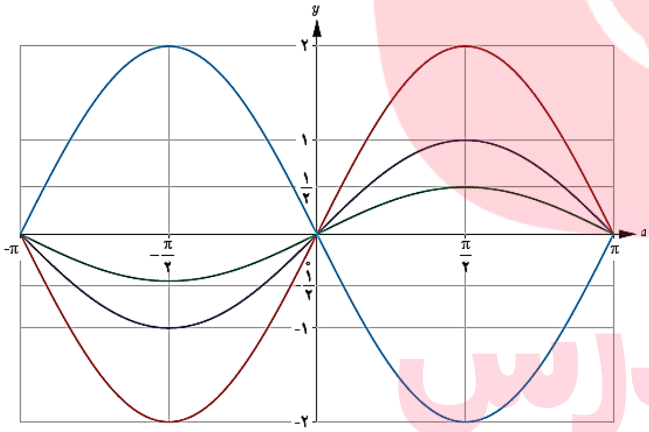
(کاردرکلاس ص ۱۶)

۱.نمودارتابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازه $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودارتوابع زیررا روی یک محوررسم کنید.

$$k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|,h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|,g(x)=-|x-۲|$$



۲.در شکل زیر نمودارتوابع با ضابطه های $y=\sin x$ ، $y=۲\sin x$, $y=-۲\sin x$,$y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم شده است نمودار را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگرچگونه به کمک آن رسم شده است . دامنه وبرد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

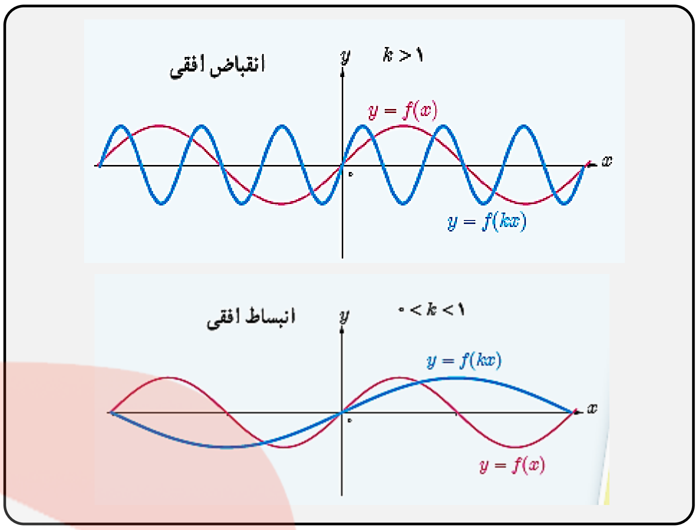


۲)رسم نمودار توابع $y=f(kx)$:

*برای رسم نمودارتابع $y=f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب یا به k تقسیم کنیم

*دامنه تابع $y=f(kx)$ بادامنه تابع $y=f(x)$ الزاما یکسان نیست، اما برد $y=f(kx)$ همان برد $y=f(x)$ است

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir



(مثال ص ۱۸)

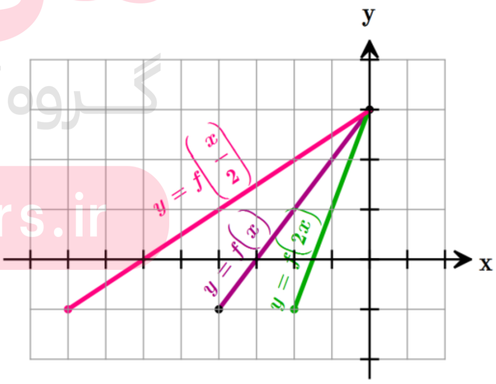
نمودارتابع $f(x)=x+3$ را با دامنه $[-4,0]$ رسم کنیدو به کمک آن نمودارتوابع زیررا روی یک محوررسم کنید.

$$y=f(2x),\ y=f\left(\frac{x}{2}\right)$$

☑حل:

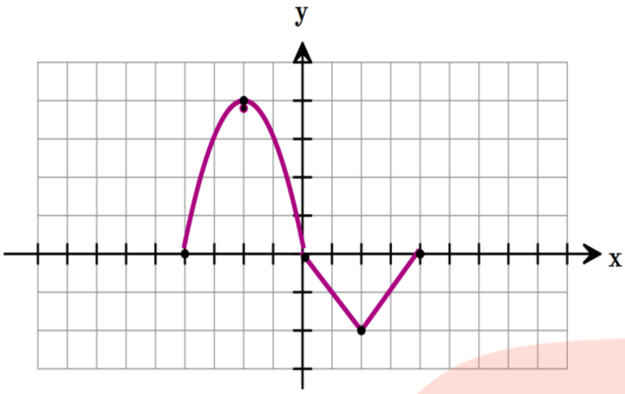
در این سوال برد تغییری نمی کند فقط دامنه تغییر می کند.

x	-4	0	$D=[-4,0]$
y	-1	3	$R=[-1,3]$
$x\times\frac{1}{2}$	-2	0	$D=[-2,0]$
$x\times 2$	-8	0	$D=[-8,0]$



(کاردرکلاس ص ۲۰)

نمودار $f(x)$ در بازه $[-4,4]$ به صورت زیر می باشد، نمودار توابع $y=f(2x)$, $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ را رسم کنید.

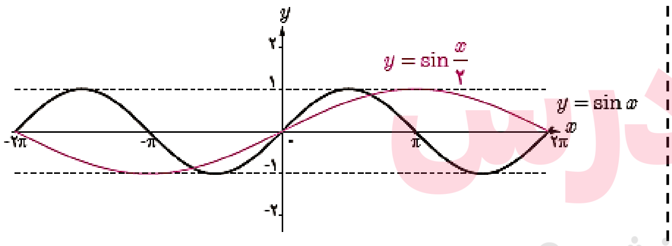


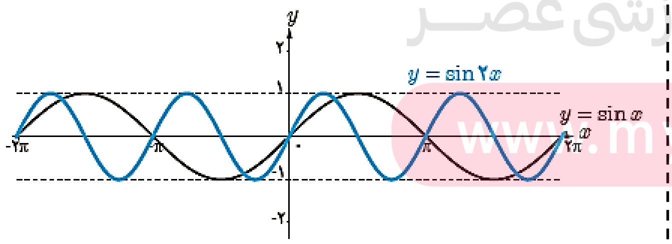
(مثال ص ۱۹)

نمودارتوابع $y=\sin\frac{x}{2}$, $y=\sin 2x$ به کمک نمودارتابع $y=\sin x$ در بازه $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید

☑حل:

در این سوال برد تغییری نمی کند فقط دامنه تغییر می کند.





(تمرین ۱۰و۱۱و۱۲ص ۲۳)

⑪ نمودارتابع $y=\sin x$ را در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم کنیدو به کمک آن نمودارتوابع زیررا رسم کنید.

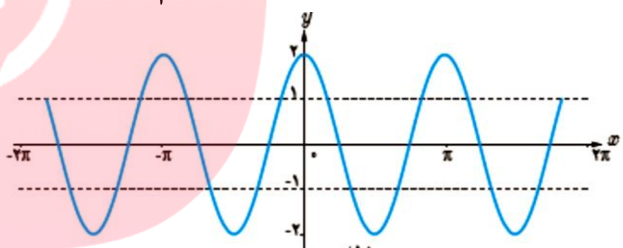
$$y=-\sin 2x-1\ ,\ y=2\sin\left(\frac{-1}{3}x\right)$$

های درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

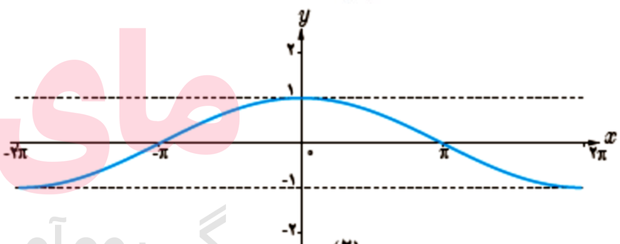
⑩ با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، ضابطه هرنمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)$ ب) $y = 2\cos 2x$

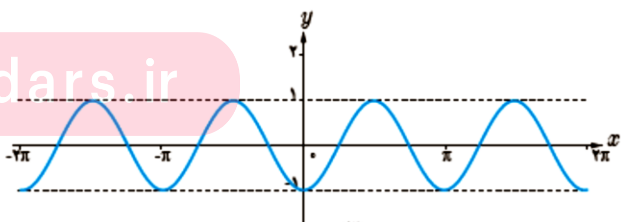
پ) $y = \cos(\frac{1}{2}x)$ ت) $y = -\cos 2x$



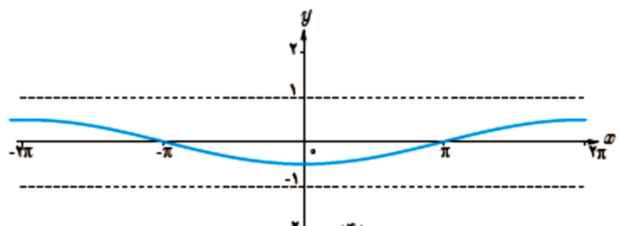
(۱)



(۲)



(۳)

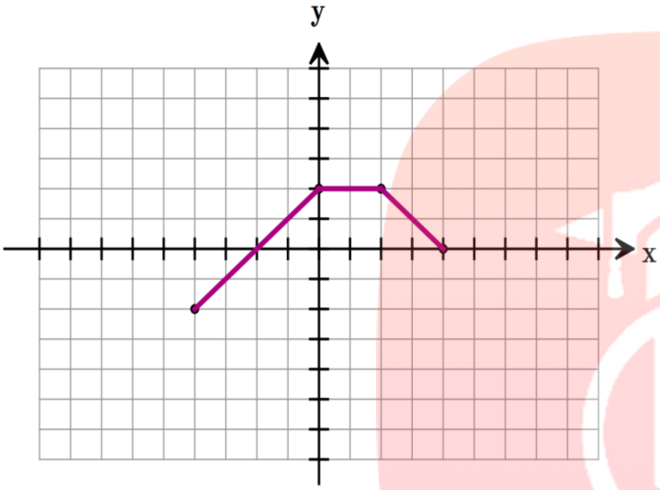


(۴)

⑫ اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید

۱) $y = \frac{1}{2}f(2x) - 1$ ۲) $y = -f(-x) + 2$

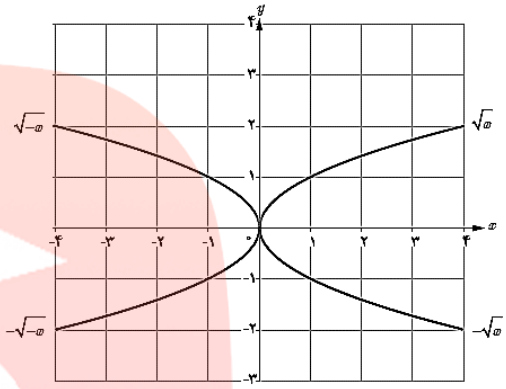
۳) $y = 2f(x-1) - 3$ ۴) $y = 2f\left(\frac{1}{2}x\right)$



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

(کاردرکلاس ص ۱۹)

نمودارتوابع $y=\sqrt{-x}\,,y=-\sqrt{x}\,,y=-\sqrt{-x}$ به کمک آن نمودارتابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده است دامنه و برد توابع را بنویسید.



۳)رسم نمودار $y=\left|f(x)\right|$:

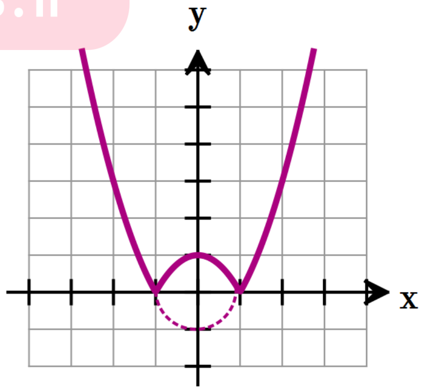
*نمودار $y=f(x)$ را رسم می کنیم و قسمت هایی را که منفی و زیر محور x است را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم زیرا قدر مطلق ،مقادیر منفی را مثبت می کند

(مثال ص ۱۷)

نمودار تابع $y=\left|x^2-1\right|$ را رسم کنید.

☑حل:

ابتدا نمودار x^2-1 را که یک سهمی است رسم می کنیم سپس قسمت های منفی را نسبت به محور x قرینه می کنیم

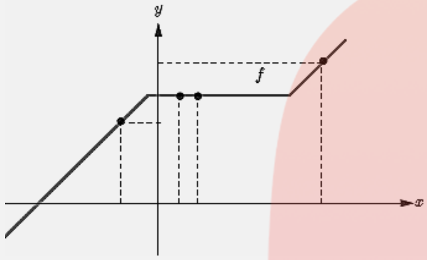


توابع صعودی و توابع نزولی:

*وقتی x در دامنه تابع افزایش می یابد تغییرات تابع(رفتار) به صورت زیر بررسی می شود:

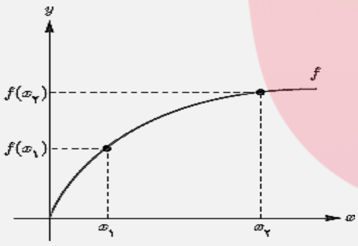
الف)تابع صعودی: تابعی که با افزایش x مقدار y یا افزایش می یابد یا ثابت می ماند.

$$x_1,x_2\in D_f : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$$



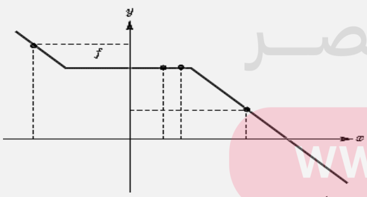
ب) تابع اکیداً صعودی: تابعی که با افزایش x مقدار y هم افزایش می یابد

$$x_1,x_2\in D_f : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)< f(x_2)$$



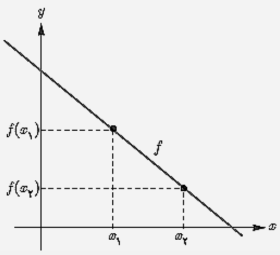
پ)تابع نزولی: تابعی که با افزایش x مقدار y یا کاهش می یابد یا ثابت می ماند.

$$x_1,x_2\in D_f : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$$



ت) تابع اکیداً نزولی: تابعی که با افزایش x مقدار y کاهش می یابد

$$x_1,x_2\in D_f : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)> f(x_2)$$



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

نکات توابع صعودی و توابع نزولی:

***تابع ثابت** در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود.

***تابع یکنوا :** اگرتابع در بازه ای صعودی یا نزولی باشد،گوییم تابع یکنواست

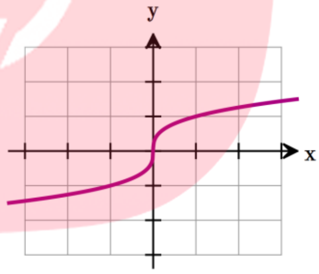
*** تابع اکیداً یکنوا:** اگرتابع در بازه ای اکیداً صعودی(یا اکیداً نزولی) باشد،گوییم تابع اکیدا یکنواست مثل تابع خطی درجه ۳،تابع نمایی و لگاریتمی

*توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستنداما عکس آن درست نیست.

*اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد(اکیداً یکنوا)حتماًیک به یک (y تکراری نداریم) نیز هست.

(فعالیت ص۱۰)

باتوجه به نمودار:



الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

ب) این تابع یک به یک است؟

پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟

☑حل:

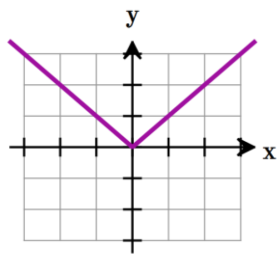
الف) اکیدا صعودی

ب) بله

پ) خیر

*** تابع غیر یکنوا:** تابعی که نه صعودی و نه نزولی است یعنی در بعضی بازه ها صعودی(اکیداً صعودی) و در بعضی بازه ها نزولی(اکیداً نزولی) است

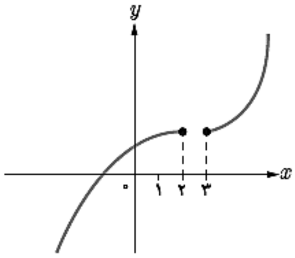
(مثال ص ۸) $y=|x|$



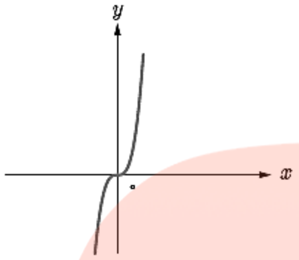
اکیداً نزولی	$(-\infty,0]$
اکیداً صعودی	$[0,+\infty)$
غیر یکنوا	$(-\infty,+\infty)$

(کاردرکلاس ص۸)

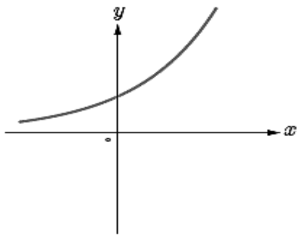
هر کدام از توابع زیر در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در چه بازه هایی اکیداً نزولی هستند؟



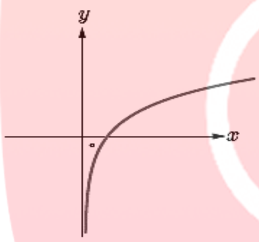
(الف)



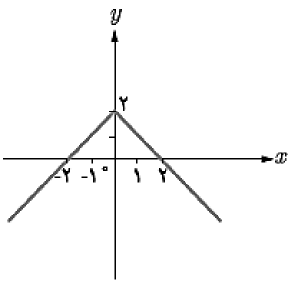
(ب)



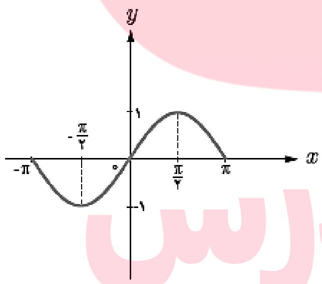
(ت)



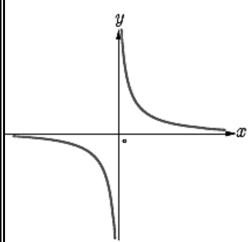
(ث)



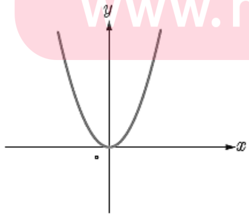
(ج)



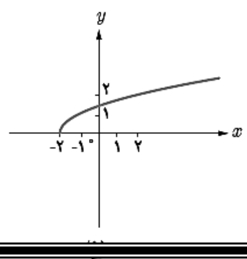
(ح)



(ج)



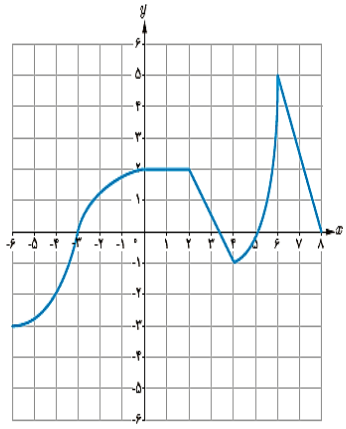
(پ)



مای درس گروه آموزشی عصر www.my-dars.ir

(تمرین ۳ ص۱۰)

با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟

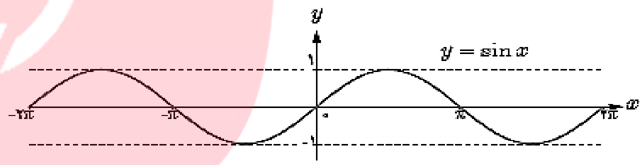


☑حل:

صعودی	[−۶,۰]
ثابت	[۰,۲]
نزولی	[۲,۴]
صعودی	[۴,۶]
نزولی	[۶,۸]

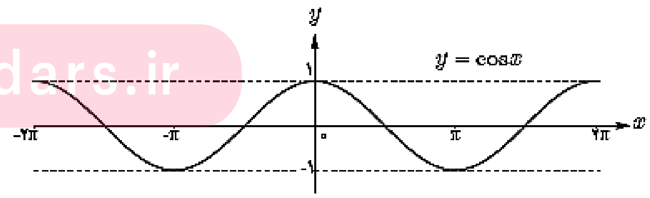
(کاردرکلاس ص۹)

صعودی یا نزولی بودن نمودارتوابع زیر را در بازه های مشخص شده تعیین کنید.



x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$
$y=\sin x$				

$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
صعودی			



x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$
$y=\cos x$				

$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
		صعودی	

(کاردرکلاس ص۹)

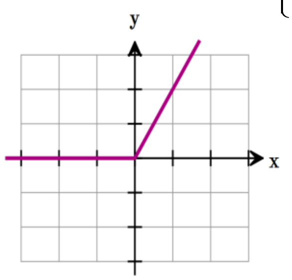
نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی هستند.

الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$ $\quad D_f=[0,2\pi]$

ب) $g(x)=x+|x|$

☑حل:

$$y=x+|x|=\begin{cases} x+x=2x & x\geq 0 \\ x-x=0 & x<0 \end{cases}$$



ثابت	$(-\infty,0)$
اکیداً صعودی	$[0,+\infty)$
صعودی	$(-\infty,+\infty)$

پ) $t(x)=-x^3-1$

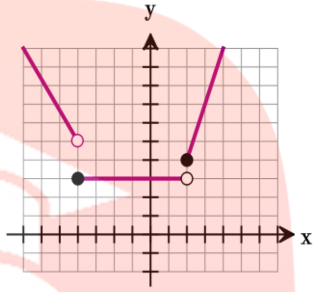
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

(تمرین ۲و۴و۵و۶و۷ ص ۱۰)

② نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -۲x-۳ & x<-۴ \\ ۳ & -۴\le x<۲ \\ ۳x-۲ & x\ge ۲ \end{cases}$$

☑حل:

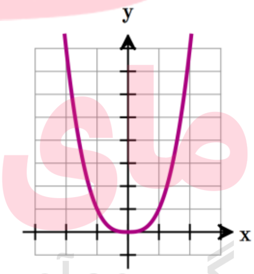


اکیداً نزولی	$(-\infty,-۴)$
ثابت	$[-۴,۲)$
اکیداً صعودی	$[۲,+\infty)$

⑤ تابع $y=x^۲\left|x\right|$ در بازه $\left(-\infty,a\right]$ نزولی است ، حداکثر مقدار a را به دست آورید.

☑حل:

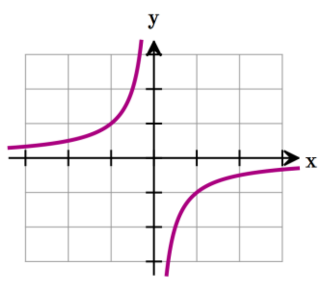
$$y=x^۲\left|x\right|=\begin{cases} x^۳ & x>۰ \\ -x^۳ & x\le ۰ \end{cases}$$

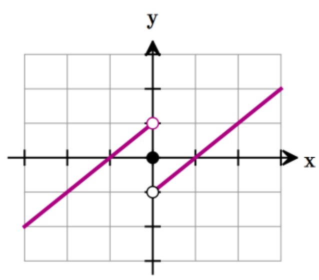


$\left(-\infty,a\right]\to a=۰$

⑦ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه های $(-\infty,۰),(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در R اکیداً صعودی نباشد.

☑حل:

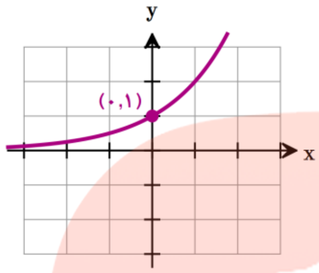


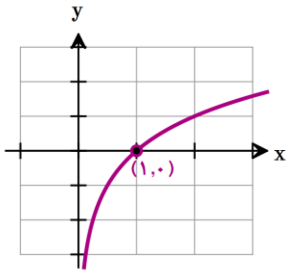


⑥ الف)تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی باشد

☑حل:

$y=a^x\ (a>۱)$ $\qquad$ $y=\log_a x\ (a>۱)$

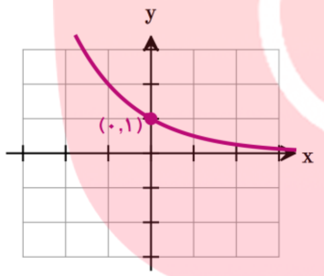


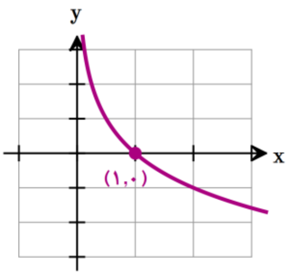


ب)تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد.

☑حل:

$y=a^x\ (۰<a<۱)$ $\qquad$ $y=\log_a x\ (۰<a<۱)$

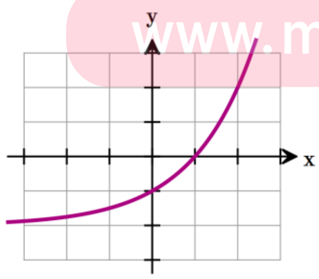




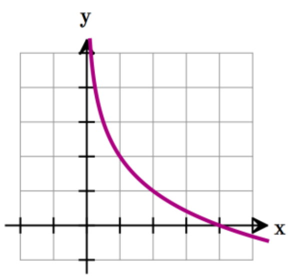
④ تابع نمایی $y=۲^x-۲$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_۲^x+۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

☑حل:

$y=۲^x-۲$ $\qquad$ $y=-\log_۲^x+۲$



اکیدا صعودی



اکیدا نزولی

مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

فصل ۱ درس ۲: ترکیب توابع

ترکیب توابع (تابع مرکب):

※ تابع نوعی ماشین است که به ازای هر ورودی دقیقا یک خروجی تولید می کند $x \xrightarrow{\boxed{f}} f(x)$

※هرگاه خروجی یک تابع را به عنوان ورودی تابع دیگر استفاده کنیم در واقع دو تابع را باهم ترکیب کرده ایم.

۱) تابع fog:

$$x \xrightarrow{\boxed{g}} g(x) \xrightarrow{\boxed{f}} f\left(g(x)\right)$$

۲) تابع gof :

$$x \xrightarrow{\boxed{f}} f(x) \xrightarrow{\boxed{g}} g\left(f(x)\right)$$

محاسبه تابع مرکب در زوج های مرتب:

برای راحتی کار از نمودار پیکانی کمک می گیریم

(مثال ص ۱۳)

اگر $f=\{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵),(-۲,۴)\}$ و تابع $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰),(-۱,۴),(۵,-۷)\}$

gof را بیابید.

☑حل:

$$\left\{\begin{array}{l} ۰ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{g} ۴ \\ ۵ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} ۰ \\ ۳ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g} -۷ \\ -۲ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} \times \end{array}\right\} \xrightarrow{gof} \{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$

(تمرین ۱ ص ۲۲)

①اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ ، تابع fog, gof را بیابید

محاسبه مقدار تابع مرکب از روی جدول و نمودار:

برای پیدا کردن مقدار تابع ، ابتدا مقدار x را در تابع داخلی قرار می دهیم.سپس حاصل را در تابع خارجی جایگزین می کنیم

(کاردرکلاس ص ۱۴و تمرین ۸ ص ۲۳)

با توجه به جدول های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	$f(x)$
-۳	-۷
-۲	-۵
-۱	-۳
۰	-۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

x	$g(x)$
-۳	۸
-۲	۳
-۱	۰
۰	-۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

الف) $(f o g)(۱)$

☑حل:

$$۱ \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} \boxed{-۱}$$

یا

$$f o g(۱) = f\left(g(x)\right) \xrightarrow{x=۱} f\left(\cancel{g(۱)}^{۰}\right) = -۱$$

ب) $(f o g)(-۱)$

پ) $(gof)(۰)$

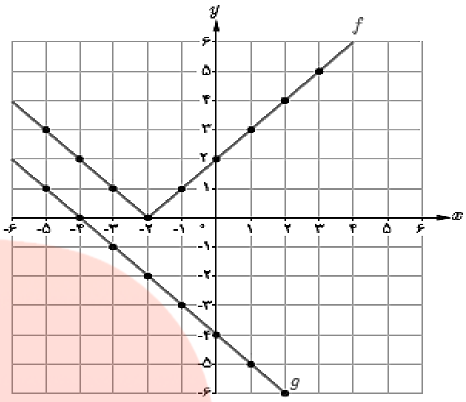
ت) $(gog)(-۲)$

ث) $(gof)(۲)$

ج) $(f o f)(۱)$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

⑧ با توجه به نمودارهای $f\,,g$ توابع مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $(f\,o\,g)(-۱)$

ب) $(gof)(۰)$

پ) $(f\,o\,g)(۱)$

ث) $(gof)(-۱)$

محاسبه تابع مرکب با استفاده از ضابطه :

اگر دوتابع $f(x),g(x)$ داشته باشیم و به جای x یکی از تابع ها، ضابطه یا مقدار تابع دیگر را قرار دهیم، می گوییم دوتابع را ترکیب کرده ایم.

تابع مرکب	ضابطه تابع	روش محاسبه
$(fog)(x)$	$f(g(x))$	در f به جای x بذار $g(x)$
$(gof)(x)$	$g(f(x))$	در g به جای x بذار $f(x)$
$(fof)(x)$	$f(f(x))$	در f به جای x بذار $f(x)$

*معمولا توابع fog,gof با هم برابر نیستند.

دامنه تابع مرکب:

*دامنه تابع مرکب fog مجموعه xهایی است که هم زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنه g قرار داشته باشد.

۲) $g(x)$ در دامنه f قرار داشته باشد.

$$D_{fog}=\left\{\underbrace{x\in D_g}_{۱}\;/\;\underbrace{g(x)\in D_f}_{۲}\right\}$$

*به طور مشابه دامنه gof هم به صورت زیر است:

$$D_{gof}=\left\{\underbrace{x\in D_f}_{۱}\;/\;\underbrace{f(x)\in D_g}_{۲}\right\}$$

الف) شرط تشکیل تابع fog: $\quad R_g\cap D_f\neq\varnothing$

ب) شرط تشکیل تابع gof: $\quad R_f\cap D_g\neq\varnothing$

*دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می آوریم نه از روی ضابطه آن.

(مثال ص ۱۴)

الف) اگر $f(x)=x-۲,\,g(x)=x^۲-۱$ دامنه و ضابطه ی تابع gof را بیابید

☑ حل:

$$\boxed{D_f=\mathbb{R}\;,\;D_g=\mathbb{R}}$$

دامنه تابع gof :

$$D_{gof}=\{x\in D_f\;/\;f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\;/\;(x-۲)\in\mathbb{R}\}\xrightarrow{\cap}\mathbb{R}$$

ضابطه ی تابع gof :

$$(gof)(x)=g(f(x))\xrightarrow[g(x)=x^۲-۱]{\text{در } g \text{ به جای } x \text{ بذار } f(x)}(x-۲)^۲-۱$$

ب) اگر $f(x)=\sqrt{x-۱},\,g(x)=۲x^۲-۱$ دامنه و ضابطه ی تابع fog,gof را بیابید

مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

(کاردرکلاس ص۱۴)

اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}, g(x)=\frac{۳}{x}$ دامنه و ضابطه ی تابع fog, fof را بیابید

(تمرین ۲ ص۲۲)

② در هر قسمت دامنه و ضابطه ی تابع fog را بیابید

الف) $f(x)=x^۲-۵ \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x+۶}$

ب) $f(x)=\sqrt{۳-۲x} \quad ; \quad g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}$

② در هر قسمت دامنه و ضابطه ی تابع gof را بیابید

پ) $f(x)=\sqrt{x+۲} \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶}$

ت) $f(x)=\sin x \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x}$

(تمرین ۴و۳و۵ ص۲۲)

④ الف) اگر $f(x)=x^۲-۴, g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ آنگاه $fog(۵)=-۲۵$

ب) برای هر دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

پ) اگر $g(۴)=۷, f(۷)=۵$ آن گاه $fog(۴)=۵$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=۲x-۱$ آن گاه $(fog)(۵)=g(۲)$.

③ اگر $f(x)=۳x-۴, f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ ضابطه ی تابع $g(x)$ را بیابید

☑حل:

در f به جای x بذار $g(x)$

$$\begin{cases} f(g(x))=۳g(x)-۴ \\ f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴ \end{cases} \rightarrow$$

$$۳g(x)-۴=۳x^۲-۶x+۱۴ \rightarrow$$

$$۳g(x)=۳x^۲-۶x+۱۸ \rightarrow$$

$$g(x)=\boxed{x^۲-۲x+۶}$$

⑤ الناز می خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید .این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است .همچنین این فروشگاه روزهای پنج شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می دهد .با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب)اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

نوشتن یک تابع به صورت ترکیب دو تابع:

*همیشه دو تابع را ترکیب می کردیم و تابع مرکب می ساختیم حالا می خواهیم عکس این کار را انجام دهیم برای این کار، قسمتی از تابع مرکب (تابع مرکب را fog در نظر میگیریم) را جدا می کنیم و به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می گیریم و در جای خالی، حرف x قرار می دهیم و تابعی که به دست می آید تابع $f(x)$ است

*ازیک تابع می توان بی شمار ، ترکیب دو تابع ساخت

(تمرین ۶و ۷ ص ۲۲)

⑦ هریک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید .

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$

☑حل:

$$h(x)=\sqrt[۳]{\underbrace{\boxed{x^۲}}_{g(x)=x^۲}+۱} \Rightarrow f(x)=\sqrt[۳]{x+۱} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=\sqrt[۳]{x+۱} \quad , \quad g(x)=x^۲}$$

ب) $l(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

مای درس — کمک آموزشی عصر — www.my-dars.ir

⑥تابع $h(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است.

الف) $f(x) = \sqrt[5]{x}\ ,\ g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

ب) $k(x) = x^5\ ,\ l(x) = 3x^2 - 4x + 1$

معادلات توابع مرکب:

می توانیم ابتدا ضابطه مرکب را پیدا کنیم سپس معادله به دست آمده را حل کنیم و یا از مراحل زیر کمک بگیریم:

*مراحل حل معادله $(f\,o\,g)(x) = a$:

۱. به دست آوردن جواب معادله $f(x) = a$
۲. جواب معادله $f(x) = a$ را مساوی عبارت $g(x)$ قرار داده و معادله را حل می کنیم

*مراحل حل معادله $(g\,of)(x) = a$:

۱. به دست آوردن جواب معادله $g(x) = a$
۲. جواب معادله $g(x) = a$ را مساوی عبارت $f(x)$ قرار داده و معادله را حل می کنیم

(تمرین ۹ص ۲۳)

⑨ با توجه به ضابطه های توابع f, g معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف)
$$f(x) = 2x - 5$$
$$g(x) = x^2 - 3x + 8$$
$$f\,o\,g(x) = 7$$

☑حل:

راه اول:

☑حل:

راه دوم:

$$1)\ f(x) = 7 \to 2x - 5 = 7 \to x = 6$$
$$2)\ g(x) = 6 \to x^2 - 3x + 8 = 6 \to$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \to (x-1)(x-2) = 0 \to \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

ب)
$$g(x) = 1 - 2x$$
$$f(x) = 3x^2 + x - 1$$
$$gof(x) = -5$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل ۱ درس ۳: تابع وارون

تابع وارون:

در نمایش زوج مرتبی یک تابع یک به یک (f) ،اگر جای مولفه های اول و دوم را عوض کنیم ،وارون تابع (f^{-1}) به دست می آید.

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

مثال:

وارون تابع $f=\{(۶,۴),(۵,۳),(۲,۱)\}$ را بنویسید.

☑حل:

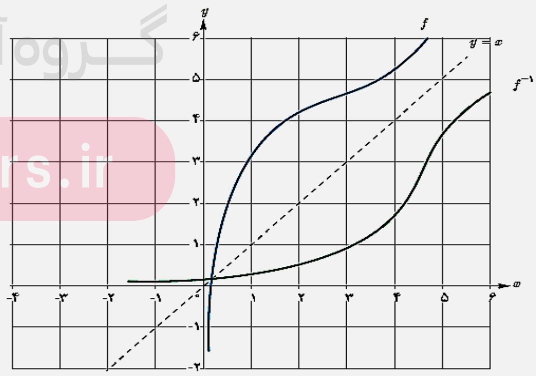
$$f^{-1}=\{(۴,۶),(۳,۵),(۱,۲)\}$$

*دامنه و برد f, f^{-1} عکس هم هستند:

$$D_f=R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f=D_{f^{-1}}$$

*نمودار تابع (f) و تابع وارون آن (f^{-1}) نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم)قرینه اند.

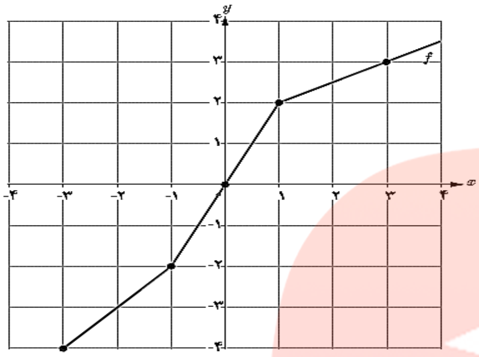
*برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است مختصات نقاطی را که روی (f) مشخص است پیدا کنیم و جای x,y را عوض کنیم و تابع وارون را رسم کنیم



(تمرین ۵ص۲۹)

⑤ از نمودار (f) برای تکمیل جدول استفاده کنید.

x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-1}(x)$	...	...	...	...



ترکیب تابع و تابع وارون:

اگر (f) تابعی وارون پذیر باشدترکیب f, f^{-1} تابعی همانی هست.

$$f(f^{-1}(x))=x \quad ; \quad x\in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x))=x \quad ; \quad x\in D_f$$

(مثال ص ۲۴)

اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ باشد حاصل $f o f^{-1}$ و $f^{-1}of$ را بیابید.

☑حل:

$$f^{-1}=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

$$\begin{cases}(fof^{-1})(۴)=f(f^{-1}(۴))=f(۱)=۴\\(fof^{-1})(۳)=f(f^{-1}(۳))=f(۲)=۳\\(fof^{-1})(۵)=f(f^{-1}(۵))=f(۳)=۵\end{cases}$$

$$\rightarrow fof^{-1}=\{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(۱)=f^{-1}(f(۱))=f^{-1}(۴)=۱\\(f^{-1}of)(۲)=f^{-1}(f(۲))=f^{-1}(۳)=۲\\(f^{-1}of)(۳)=f^{-1}(f(۳))=f^{-1}(۵)=۳\end{cases}$$

$$\rightarrow f^{-1}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$$

مای درس گروه آموزشی عصر www.my-dars.ir

*اگر دوتابع f , g در شرایط زیر صدق کنند حتما یک به یک و وارون یکدیگرند.

الف) $(fog)(x)=x\ ;\ x\in D_g$

ب) $(gof)(x)=x\ ;\ x\in D_f$

(مثال ص ۲۶)

نشان دهید توابع $f(x)=3x-4, g(x)=\frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند

☑حل:

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع ،برابر تابع همانی است

$$f(g(x))=3g(x)-4=3\left(\frac{x+4}{3}\right)-4=x \qquad (x\in D_g)$$

$$g(f(x))=\frac{f(x)+4}{3}=\frac{3x-4+4}{3}=x \qquad (x\in D_f)$$

(تمرین ۲ص۲۹)

نشان دهید توابع زیر وارون یکدیگرند

الف) $f(x)=\frac{-7}{2}x-3 \quad , \quad g(x)=-\frac{2x+6}{7}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-8} \quad , \quad g(x)=8+x^2\ ;\ x\le 0$

به دست آوردن ضابطه تابع وارون:

*اگرتابع یک به یک باشد برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون ابتدا x را بر حسب y محاسبه می کنیم (یعنی xرا تنها می کنیم)سپس جای x,y را عوض می کنیم و ضابطه $f^{-1}(x)$را می یابیم. ودامنه و برد تابع و وارون تابع را مشخص می کنیم.

*توابع خطی غیر ثابت $(\underset{a\neq 0}{y=ax+b})$ ، توابع رادیکالی و توابع گویا ،تابع یک به یک هستند.

*توابع خطی ثابت $(\underset{a=0}{y=ax+b})$، توابع سهمی وتوابع قدر مطلقی،تابع یک به یک نیستند.

(کاردرکلاس ص ۲۶)

آیاتابع $f(x)=x^3$ یک به یک است؟چرا؟

☑حل:

در نمایش مختصاتی تابع یک به یک، هر خط افقی(موازی محور x ها)، نمودار راحداکثر در یک نقطه قطع می کند به عبارتی y تکراری نداریم

(مثال و کاردر کلاس ص ۲۶و۲۷)

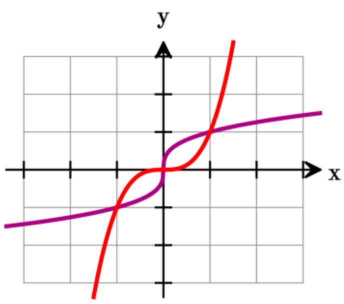
ضابطه تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید .دامنه و برد هر تابع و وارون آن رابا استفاده از نمودار مشخص کنید .

۱) $f(x)=x^3$

☑حل:

$$\underbrace{f(x)=x^3}_{D_f=R\ ,\ R_f=R}=y=x^3 \xrightarrow{\text{بر حسب } y\ \ x} x=\sqrt[3]{y}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt[3]{x} \rightarrow \underbrace{\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}}}_{D_{f^{-1}}=R\ ,\ R_{f^{-1}}=R}$$



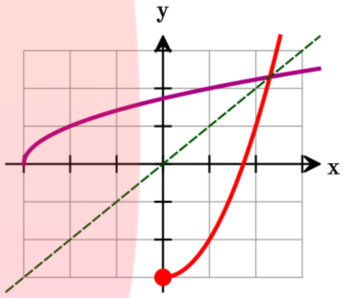
۲) $f\left(x\right)=\sqrt{x+3}$

☑حل:

$\underbrace{f\left(x\right)=\sqrt{x+3}}_{D_f=\left[-3,+\infty\right),\ R_f=\left[0,+\infty\right)} \rightarrow y=\sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{۲طرف به توان ۲}}$

$y^2=x+3 \xrightarrow{x\ \text{بر حسب}\ y} x=y^2-3 \xrightarrow{x\leftrightarrow y}$

$y=x^2-3 \rightarrow \underbrace{\boxed{f^{-1}\left(x\right)=x^2-3}}_{D_{f^{-1}}=\left[0,+\infty\right),\ R_{f^{-1}}=\left[-3,+\infty\right)}$



۳) $h\left(x\right)=x^2+1$

☑حل:

تابع یک به یک نیست و وارون ندارد

۴) $g\left(x\right)=1+\sqrt{x-2}$

۵) $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}x+3$

(تمرین ۱ص۲۹)

ضابطه تابع وارون توابع زیر را به دست آورید

۱) $f\left(x\right)=\frac{-8x+3}{2}$

۵) $g\left(x\right)=-5-\sqrt{3x+1}$

(تمرین ۳ص۲۹)

③رابطه بین درجه سانتی گراد و فارنهایت که برای اندازه گیری دما استفاده می شوند به صورت $f\left(x\right)=\frac{9}{5}x+32$ است که در آن x میزان درجه سانتی گراد و $f\left(x\right)$ میزان درجه فارنهایت است . $f^{-1}\left(x\right)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می دهد.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

وارون ترکیب دو تابع:

※اگر ترکیب دوتابع را وارون کنیم ،تک تک تابع ها وارون و جای آنها عوض می شود.

$\left(fog\right)^{-1}=g^{-1}of^{-1}\quad,\quad\left(gof\right)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$

※برای پیدا کردن مقدار تابع ، ابتدا مقدار xرا در تابع داخلی قرار می دهیم.سپس حاصل را در تابع خارجی جایگزین می کنیم

(تمرین ۷ص۲۹)

اگر $f\left(x\right)=\frac{۱}{۸}x-۳,g\left(x\right)=x^۳$ مقادیر زیر را بدست آورید .

$۱)\left(fog\right)^{-1}\left(۵\right)=$

☑حل:

ابتدا وارون دو تابع را می یابیم.

$f\left(x\right)=\frac{۱}{۸}x-۳\to y=\frac{۱}{۸}x-۳\to y+۳=\frac{۱}{۸}x$

$\xrightarrow{x \text{ بر حسب } y}x=۸y+۲۴\xrightarrow{x\leftrightarrow y}$

$y=۸x+۲۴\to \underline{f^{-1}\left(x\right)=۸x+۲۴}$

$g\left(x\right)=x^۳\to \underline{g^{-1}\left(x\right)=\sqrt[۳]{x}}$

حالا مقدار خواسته شده را می یابیم:

$\left(fog\right)^{-1}\left(۵\right)=\left(g^{-1}of^{-1}\right)\left(۵\right)=g^{-1}\left(f^{-1}\left(۵\right)\right)$

$\xrightarrow{f^{-1}(۵)=۸(۵)+۲۴=۶۴}\sqrt[۳]{۶۴}=\boxed{۴}$

$۲)\left(f^{-1}of^{-1}\right)\left(۶\right)=$

☑حل:

$\left(f^{-1}of^{-1}\right)\left(۶\right)=f^{-1}\left(f^{-1}\left(۵\right)\right)$

$\xrightarrow{f^{-1}(۵)=۸(۵)+۲۴=۶۴}۸\left(۶۴\right)+۲۴=\boxed{۶۰۰}$

$۳)\left(g^{-1}of^{-1}\right)\left(۵\right)=$

محدود کردن دامنه یک تابع غیریک به یک وتبدیل آن به تابع یک به یک:

※اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست .اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد.

※توابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ در هر یک از بازه های $\left(-\infty,\frac{-b}{۲a}\right],\left[\frac{-b}{۲a},+\infty\right)$ یک به یک است.

(مثال ص ۲۷ و۲۸ تمرین ۴ ص ۲۹)

توابع زیر یک به یک نیستند .

الف)با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک بسازید

ب) ضابطه وارون آنها را به دست آورید.

ج)توابع را رسم کنید.

$۱)f\left(x\right)=x^۲$

☑حل:

الف) تابع $f\left(x\right)=x^۲$ را به دو تابع با دامنه های زیر محدود می کنیم وتابعی یک به یک می سازیم .

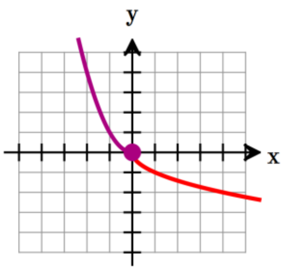
$\left[\frac{-b}{۲a},+\infty\right),\left(-\infty,\frac{-b}{۲a}\right]\to\left[۰,+\infty\right),\left(-\infty,۰\right]$

ب) ضابطه وارون تابع را در یکی از دامنه ها $\left(-\infty,۰\right]$ به دست می آوریم

$\xrightarrow{D_f=(-\infty,۰]}\underbrace{f\left(x\right)=x^۲}_{D_f=(-\infty,۰]\,,\,R_f=[۰,+\infty)}\to y=x^۲\xrightarrow{x \text{ بر حسب } y}$

$x=\pm\sqrt{y}\xrightarrow{x\le ۰}x=-\sqrt{y}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=-\sqrt{x}$

$\to\underbrace{f^{-1}\left(x\right)=-\sqrt{x}}_{D_{f^{-1}}=[۰,+\infty),\,R_{f^{-1}}=(-\infty,۰]}$



۲) $h(x)=x^{2}-2x+2$

☑حل:

الف) تابع $h(x)=x^{2}-2x+2$ را به دو تابع با دامنه های زیر محدود می کنیم وتابعی یک به یک می سازیم .

$$\left[\frac{-b}{2a},+\infty\right),\left(-\infty,\frac{-b}{2a}\right]\rightarrow\left[1,+\infty\right),\left(-\infty,1\right]$$

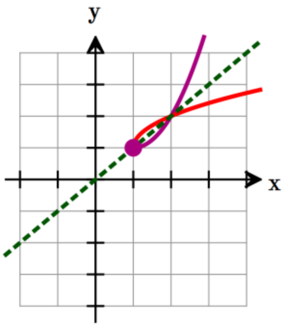
ب) ضابطه وارون تابع را در یکی از دامنه ها $\left[1,+\infty\right)$ به دست می آوریم:

$$\xrightarrow{D_h=\left[1,+\infty\right)}\underbrace{h(x)=(x-1)^{2}+1}_{D_h=\left[1,+\infty\right),\ R_h=\left[1,+\infty\right)}\rightarrow y=(x-1)^{2}+1$$

$$\xrightarrow{x\ \text{بر حسب}\ y}(x-1)^{2}=y-1\rightarrow x-1=\pm\sqrt{y-1}$$

$$\xrightarrow{x\geq 1}x=\sqrt{y-1}+1\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\sqrt{x-1}+1$$

$$\rightarrow\underbrace{\boxed{h^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+1}}_{D_{h^{-1}}=\left[1,+\infty\right),\ R_{h^{-1}}=\left[1,+\infty\right)}$$



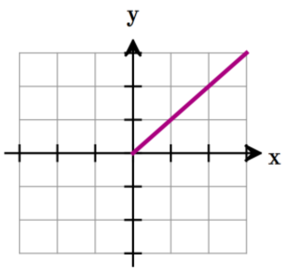
۳) $f(x)=|x|$

☑حل:

الف) تابع $f(x)=|x|$ را به دو تابع با دامنه های $\left[0,+\infty\right),\left(-\infty,0\right]$ محدود می کنیم وتابعی یک به یک می سازیم .

$$\xrightarrow{D_f=\left[0,+\infty\right)}\underbrace{f(x)=|x|}_{D_f=\left[0,+\infty\right),\ R_f=\left[0,+\infty\right)}\xrightarrow{x\geq 0}y=x$$

$$\rightarrow\underbrace{\boxed{f^{-1}(x)=x}}_{D_{f^{-1}}=\left[0,+\infty\right),\ R_{f^{-1}}=\left[0,+\infty\right)}$$



۴) $g(x)=-x^{2}$

۵) $h(x)=x^{2}+4x+3$

(تمرین ۵ ص ۲۹)

⑤با محدود کردن دامنه ی تابع $f(x)=x^{2}-4x+5$ یک تابع یک به یک بدست آورید و دامنه و برد f و وارون آن را بدست آورید . و این دو تابع را رسم کنید.

مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

فصل دوم

مثلثات

❖ درس اول : تناوب و تانژانت

❖ درس دوم: معادلات مثلثاتی

بارم فصل ۲:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
۵	۲	۳

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل ۲ درس ۱: تناوب و تانژانت

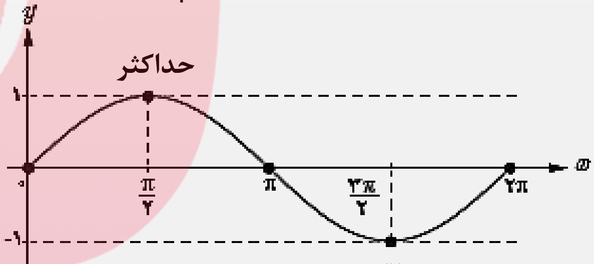
تابع مثلثاتی:

هر تابع شامل نسبت های مثلثاتی را تابع مثلثاتی می گوییم که ساده ترین آن $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ می باشد.

ویژگی های تابع با ضابطه های $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$:

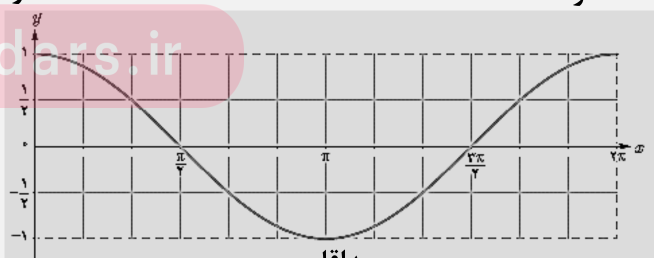
*نمودار تابع $f(x)=\sin x$:

x	$\circ$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	$\circ$	۱	$\circ$	-۱	$\circ$
تغییرات		↗	↘	↘	↗



*نمودار تابع $f(x)=\cos x$:

x	$\circ$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	$\circ$	-۱	$\circ$	۱
تغییرات		↘	↘	↗	↗



*هر دوتابع متناوب هستند چون در فواصل معینی نمودار آن تکرارمی شود.طول هر یک از این فاصله را دوره تناوب می گوییم و با حرف T نمایش می دهیم

*دورهٔ تناوب‌تابع: $T=۲\pi$

*تعریف ریاضی تابع متناوب:

تابع f را متناوب می نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته

$$f(x\pm T)=f(x)$$

باشیم:

$$۱)\sin(x\pm ۲\pi)=\sin x$$

$$۲)\cos(x\pm ۲\pi)=\cos x$$

کوچک ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دورهٔ تناوب f می نامیم

*ماکزیمم و مینیمم تابع: $\max=۱$, $\min=-۱$

*دامنه و برد تابع: $R_f=[-۱,۱]$, $D_f=\mathbb{R}$

ویژگی های تابع با ضابطه های $f(x)=a\sin bx+c$ و $f(x)=a\cos bx+c$:

*ضریب a و مقدار c روی ماکزیمم و مینیمم تابع تاثیر می گذارد

*ضریب b روی دوره تناوب تابع تاثیر می گذارد

*دورهٔ تناوب تابع: $T=\frac{۲\pi}{|b|}$

توجه:دوره تناوب باید مثبت باشد بنابراین از قدر مطلق استفاده می کنیم.

*ماکزیمم و مینیمم تابع: $\max=|a|+c$, $\min=-|a|+c$

*مقدار a و c:

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c\\ \min=-|a|+c\end{matrix}\right\}\rightarrow ۲c=\max+\min$$

$$\rightarrow c=\frac{\max+\min}{۲}\quad,\quad |a|=\frac{\max-\min}{۲}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

نوشتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب با داشتن ضابطه:

(مثال ص ۳۵ و تمرین ۱ ص ۴۰)

دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = ۳\sin(۲x) - ۲$

☑حل:

$$y = ۳\sin(۲x) - ۲ \begin{cases} a = ۳ \\ b = ۲ \\ c = -۲ \end{cases}$$

$$\max = |a| + c \to \max = |۳| - ۲ = ۱$$

$$\min = -|a| + c \to \min = -|۳| - ۲ = -۵$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$

ب) $y = -\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

پ) $y = \pi\sin(-x) + ۱$

ت) $y = ۸\cos(\frac{x}{۳})$

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$

ب) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

ت) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

نوشتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب با داشتن نمودار:

⁕تشخیص نمودار سینوس و کسینوس:

اگر محور y ها از اکسترمم تابع(ماکزیمم یا مینیمم تابع) رد شده باشد،نمودارکسینوس است،در غیر اینصورت نمودار سینوس است

⁕ a, b چون قدر مطلق دارند ، پس می توانند مثبت یا منفی باشند

⁕علامت a:

در نمودار سینوس و کسینوس اگر ابتدا ماکزیمم داشتیم a مثبت است و اگر ابتدا مینیمم داشتیم a منفی است.

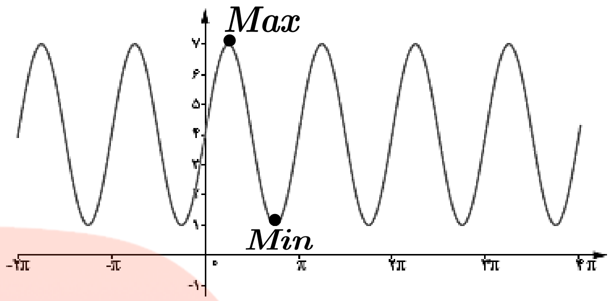
⁕علامت b:

مثبت یا منفی بودن b در کسینوس بی تاثیر است زیرا کسینوس منفی را می خورد ولی در سینوس اگر ابتدا ماکزیمم داشتیم a, b هم علامتند و اگر ابتدا مینیمم داشتیم a, b هم علامت نیستند.یعنی اگر a را منفی بگیریم b باید مثبت باشد

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

(مثال ص ۳۵وتمرین ۴ ص ۴۱)

ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



☑حل:

محور yها از اکسترمم تابع(ماکزیمم یا مینیمم تابع) رد نشده است ،نمودارسینوس است و چون ابتدا ماکزیمم آمده ، پس a,b هم علامتند.

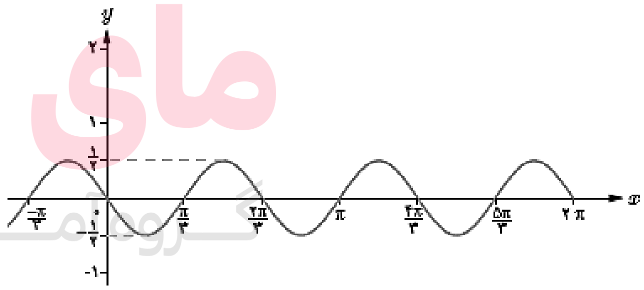
$$\max = ۷\ ,\ \min = ۱\ ,\ T = \pi$$

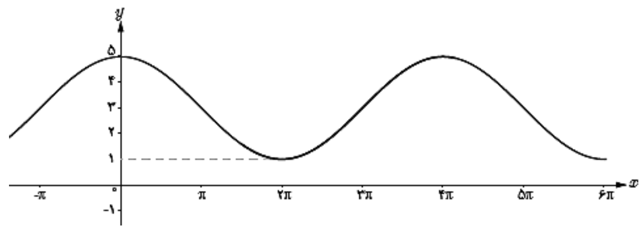
$$|a| = \frac{\max - \min}{۲} = \frac{۷-۱}{۲} = ۳$$

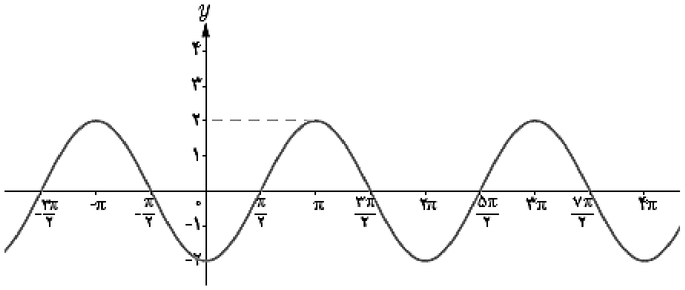
$$c = \frac{\max + \min}{۲} = \frac{۷+۱}{۲} = ۴$$

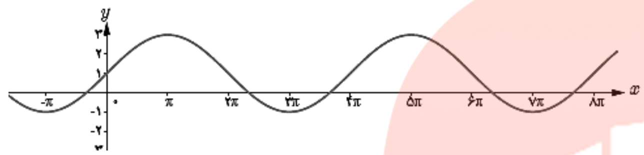
$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \to |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$$

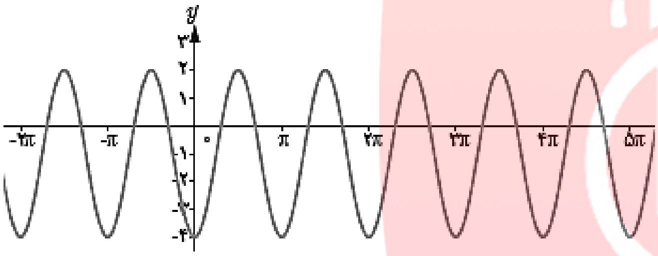
$$y = a\sin bx + c \to \boxed{y = ۳\sin(۲x) + ۴}$$











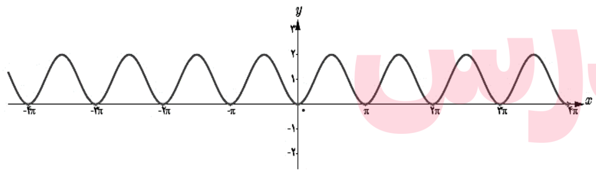
(تمرین ۲ ص ۴۰)

②هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

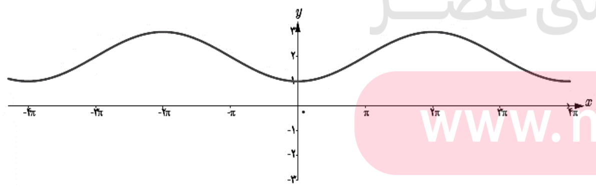
الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = ۲ - \cos \frac{۱}{۲}x$

پ) $y = \sin ۲x$ ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

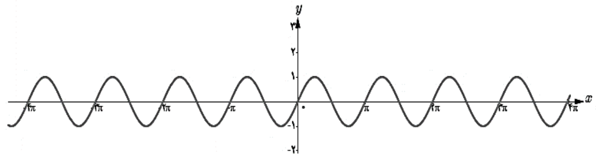
۱)



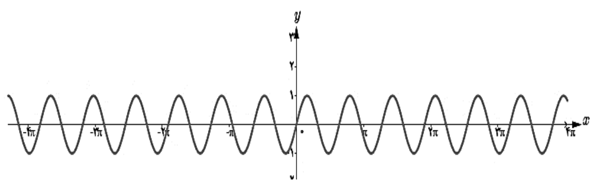
۲)



۳)



۴)



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

نوشتن ضابطه با داشتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم ودوره تناوب:

(تمرین ۳ ص ۴۱)

③ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T = \pi \quad , \quad \max = ۳ \quad , \quad \min = -۳$

☑حل:

در سوال قید نکرده ضابطه تابع سینوس یا کسینوس ، بنابراین ضابطه هر کدام بنویسیم درست است.

a, b چون قدر مطلق دارند ، پس می توانند مثبت یا منفی باشند که در اینجا ما هر دو را مثبت فرض می کنیم.

$$|a| = \frac{\max - \min}{۲} = \frac{۳-(-۳)}{۲} = ۳$$

$$c = \frac{\max + \min}{۲} = \frac{۳+(-۳)}{۲} = ۰$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$$

$$y = a\sin bx + c \rightarrow \boxed{y = ۳\sin(۲x)}$$

یا

$$y = a\cos bx + c \rightarrow \boxed{y = ۳\cos(۲x)}$$

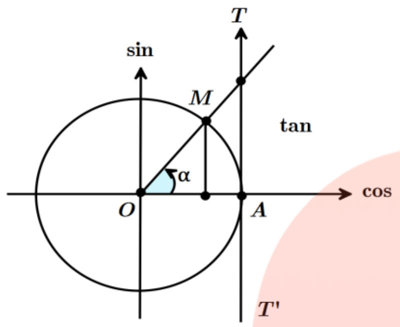
ب) $T = ۳ \quad , \quad \max = ۹ \quad , \quad \min = ۳$

پ) $T = ۴\pi \quad , \quad \max = -۱ \quad , \quad \min = -۷$

ت) $T = \frac{\pi}{۲} \quad , \quad \max = ۱ \quad , \quad \min = -۱$

تانژانت:

(فعالیت ص ۳۷)



*محور تانژانت بر دایره مثلثاتی مماس و موازی محورسینوس و عمود بر محور کسینوس است .

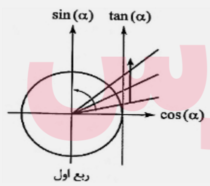
*برای پیدا کردن تانژانت هر زاویه ،ضلع آن را امتداد می دهیم تا محور تانژانت را قطع کند.سپس فاصله آن از مبدا تابع تانژانت یعنی A را به دست می آوریم که در بالا مثبت و در پایین منفی است.

تغییرات تانژانت:

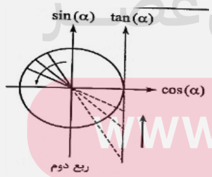
(کاردرکلاس ص ۳۸)

با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند.

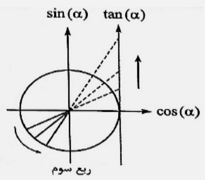
با افزایش α از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$، مقدار $\tan\alpha$ از ۰ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.



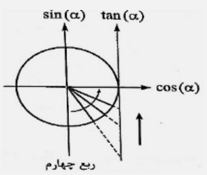
با افزایش α از $\frac{\pi}{۲}$ تا π، مقدار $\tan\alpha$ از $-\infty$ تا ۰ افزایش می‌یابد.



با افزایش α از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$، مقدار $\tan\alpha$ از ۰ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.



با افزایش α از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π ، مقدار $\tan\alpha$ از $-\infty$ تا ۰ افزایش می‌یابد.

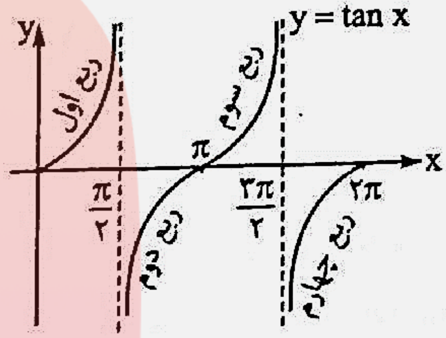


مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

تابع تانژانت:

※نمودار تابع $f(x)=\tan x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	ت	0	ت	0
تغییرات	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow\ \nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$



※دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan x$: $T=\pi$

※دامنه و برد تابع:

تابع تانژانت درنقاطی که مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ هست تعریف نشده است $\left(x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{مثل}} \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ زیرا در این نقاط مقدار $\cos x$صفر می شود و $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ معنی ندارد .بنابراین دامنه وبردتابع به صورت زیر است:

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} \ / \ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\} \quad , \quad R_f=\mathbb{R}$$

※تابع تانژانت در بازه هایی مثل زیر و هر زیر مجموعه ای از این بازه ها اکیدا صعودی است.

$$\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$$

(کاردرکلاس ص ۳۹)

صعودی یا نزولی بودن تابع $y=\tan x$ را در مجموعهٔ $[0,2\pi]-\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$ بررسی کنید.

(تمرین ۵ص ۴۰)

⑤کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

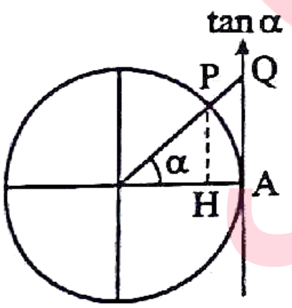
مقایسه $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$:

(تمرین ۶ص ۴۰)

⑥ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

☑حل:



ربع۱و۳ $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0<\alpha<\frac{\pi}{2} \\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \sin\alpha<\tan\alpha$

ربع ۲و۴ $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \\ \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\end{array}\right. \Rightarrow \sin\alpha>\tan\alpha$

در کل دایره مثلثاتی $\longrightarrow |\sin\alpha|<|\tan\alpha|$

های درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل ۲ درس ۲: معادلات مثلثاتی

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان:

*مقدار نسبت مثلثاتی برخی زوایای غیر معروف مثل: $(۱۵^\circ, ۲۲/۵^\circ, ...)$ را می توان به کمک زوایای معروف مثل: $(۳۰^\circ, ۴۵^\circ, ...)$ به دست آورد.

*وقتی کمان دوبرابر یا نصف می شود مقدار سینوس یا کسینوس دوبرابر یا نصف نمی شود .مثلاً $\cos ۱۵^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos ۳۰^\circ$ می توان یافت اما نه با نصف کردن.

بنابراین از روابط زیر کمک می گیریم:

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$$
$$\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$$
$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$$

(مثال ص ۴۳)

مقدار $\cos ۱۵^\circ$ و $\sin ۱۵^\circ$ را بیابید.

☑حل:

$$\cos ۳۰^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۵^\circ$$
$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۵^\circ$$
$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱ = -۲\sin^۲ ۱۵^\circ$$
$$\sin^۲ ۱۵^\circ = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱}{-۲} = \frac{۲-\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow \boxed{\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}}$$

(۱۵° در ربع اول است پس سینوس مثبت است .)

$$\sin ۳۰^\circ = ۲\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ$$
$$\frac{۱}{۲} = ۲ \times \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲} \cos ۱۵^\circ$$
$$\frac{۱}{۲} = \sqrt{۲-\sqrt{۳}} \cos ۱۵^\circ \Rightarrow \boxed{\cos ۱۵^\circ = \frac{۱}{۲\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}}$$

(۱۵° در ربع اول است پس کسینوس مثبت است.)

(تمرین ۲و۱ ص ۴۵)

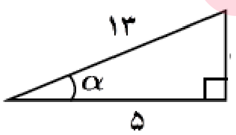
① فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha$

☑حل:

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$$
$$\cos ۲\alpha = ۲\left(\frac{۵}{۱۳}\right)^۲ - ۱ = \boxed{-\frac{۱۱۹}{۱۶۹}}$$

ب) $\sin ۲\alpha$



$\boxed{۱۲}$ •

با توجه به شکل:

$$\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳} , \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$$
$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha \cos\alpha$$
$$\sin ۲\alpha = ۲ \times \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۵}{۱۳} = \boxed{\frac{۱۲۰}{۱۶۹}}$$

② نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $۲۲/۵^\circ$ به‌دست آورید.

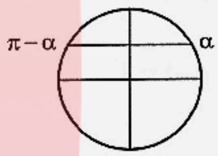
مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

معادلات مثلثاتی:

*معادله ای که در آن اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

*در معادله مثلثاتی وقتی مقدار سینوس $(\sin x = a)$ و کسینوس $(\cos x = a)$ را پیدا کردیم بایدجواب زاویه (x) را بنویسیم . این معادله وقتی جواب دارد که $(-1 \le a \le 1)$ باشد.

* دو زاویه مکمل $(\alpha , \pi - \alpha)$ سینوس هایشان باهم برابر است مثل: $\left(\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}\right), \left(30^\circ , 180^\circ - 30^\circ\right)$



*اگر معادله به صورت $\boxed{\sin x = a}$ باشد :

$$\sin x = a \rightarrow \sin x = \sin\alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

(مثال ص ۴۴)

معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

☑حل:

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

*اگر معادله به صورت $\boxed{\sin x = -a}$ باشد :

$$\sin x = -a \rightarrow \sin x = (-\alpha)$$

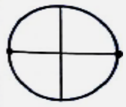
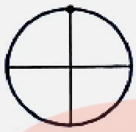
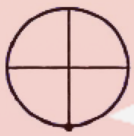
(مثال ص ۴۵)

معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

☑حل:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

*حالت های خاص:

$\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$	
$\sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	

(کار در کلاس ص ۴۵)

الف) معادله $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

☑حل:

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow 2\sin x = \sqrt{3}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ب) معادله $4\sin x + \sqrt{8} = 0$ را حل کنید.

* اگردو سینوس با هم برابرشوند ، می توانیم جواب های کلی معادله را بنویسیم ولازم نیست برای سینوس حتما یک عدد مشخصی به دست آید

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

(مثال ص ۴۶و تمرین ۳(الف) ص۴۸)

معادله $\sin ۲x = \sin ۳x$ را حل کنید.

☑حل:

$$\sin ۲x = \sin ۳x \to \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + ۳x \to x = -۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - ۳x \to x = \dfrac{۲k\pi + \pi}{۵} \end{cases}$$

الف)معادله $\sin \dfrac{\pi}{۲} = \sin ۳x$ را حل کنید.

(مثال ص ۴۷)

معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.

☑حل:

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰ \to ۲\sin ۳x = \sqrt{۲}$$

$$\sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \to \sin ۳x = \sin \frac{\pi}{۴} \to$$

$$\begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۴} \to x = \dfrac{۲k\pi}{۳} + \dfrac{\pi}{۱۲} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{۴} \to x = \dfrac{۲k\pi + \pi}{۳} - \dfrac{\pi}{۱۲} \end{cases}$$

(تمرین ۴ص۴۸)

④ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌مترمربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

☑حل:

$$s = \frac{۱}{۲} ab \sin \alpha$$

$$۳ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶ \sin \alpha \to \sin \alpha = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

در مثلث $۰ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ است.بنابراین با توجه به $\sin \alpha = \dfrac{۱}{۲}$داریم: $\alpha = ۳۰^\circ , \alpha = ۱۵۰^\circ$

یعنی دو مثلث با این خاصیت ها می‌توان ساخت.

(مثال ص ۴۷)

یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۶\, m/s$ بـرای هم‌تیمی خـود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (برحسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^۲ \sin ۲\theta}{۱۰}$$

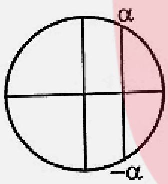
☑حل:

$$۱۲/۸ = \frac{(۱۶)^۲ \sin ۲\theta}{۱۰}$$

$$\sin ۲\theta = \frac{۱۲/۸ \times ۱۰}{۲۵۶} \to \sin ۲\theta = \frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} ۲\theta = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۶} \to \theta = k\pi + \dfrac{\pi}{۱۲} \\ ۲\theta = ۲k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{۶} \to \theta = \dfrac{k\pi + \pi}{۲} - \dfrac{\pi}{۱۲} \end{cases}$$

* دو زاویه قرینه $(\alpha , -\alpha)$ کسینوس هایشان باهم برابر است .



*اگر معادله به صورت $\boxed{\cos x = a}$ باشد:

$$\cos x = a \to \cos x = \cos \alpha \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases}$$

(مثال ص ۴۶)

معادله $\cos x = \dfrac{۱}{۲}$ را حل کنید.کدام جوابها در بازه $[-۳\pi, \pi]$ می باشند.

☑حل:

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \to \cos x = \cos \frac{\pi}{۳} \to x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

به kاعداد صحیح می دهیم و جواب ها در بازه $[-۳\pi, \pi]$ را می یابیم .طبق جدول جوابها برابر است با : $-۲\pi \pm \dfrac{\pi}{۳}$ و $\pm \dfrac{\pi}{۳}$

k	-۲	-۱	۰	۱
	×	✓	✓	×
$۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$	$-۴\pi \pm \frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi \pm \frac{\pi}{۳}$	$\pm \frac{\pi}{۳}$	$۲\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

مای درس
گروه آموزشی مای درس
www.my-dars.ir

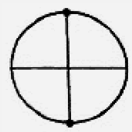
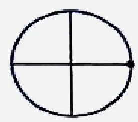
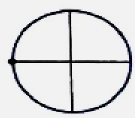
*اگر معادله به صورت $\boxed{\cos x = -a}$ باشد:
باید زاویه مربوط به مقدار مثبت را از π کم کنیم

$$\cos x = -a \to \cos x = \cos(\pi - \alpha)$$

مثال:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \to \cos x = \cos\Big(\underbrace{\pi - \frac{\pi}{3}}_{\frac{2\pi}{3}}\Big) \to x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

*حالت های خاص:

$\cos x = 0 \to x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\cos x = 1 \to x = 2k\pi$	
$\cos x = -1 \to x = 2k\pi + \pi$	

(مثال ص ۴۸)

معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

حل:

$$\cos x(2\cos x - 9) = 5 \to$$
$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\Delta = 121}$$
$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \to \cos x = \cos\Big(\underbrace{\pi - \frac{\pi}{3}}_{\frac{2\pi}{3}}\Big) \to x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 5 \to \text{غیر قابل قبول ، زیرا باید } (-1 \le a \le 1) \end{cases}$$

(تمرین ۳(ب) ص۴۸)

ب)معادله $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \xrightarrow{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1}$$
$$2\cos^2 x \cancel{-1} - \cos x \cancel{+1} = 0 \to$$
$$2\cos^2 x - \cos x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\to \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \to \cos x = \frac{1}{2} \to \\ \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \to x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

* اگردو کسینوس با هم برابرشوند ، می توانیم جواب های کلی معادله را بنویسیم ولازم نیست برای کسینوس حتما یک عدد مشخصی به دست آید

(تمرین ۳(پ) ص۴۸)

پ)معادله $\cos x = \cos 2x$ را حل کنید.

حل:

$$\cos x = \cos 2x \to \begin{cases} x = 2k\pi + 2x \to x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \to x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

*در حل معادلات مثلثاتی باید نسبتها را به یک نسبت تبدیل کنیم

(تمرین ۳(ت و ث) ص۴۸)

ت)معادله $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$ را حل کنید.

ث) معادله $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

(مثال ص ۴۷)

معادله $\sin x\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ **را حل کنید.**

☑**حل:**

دو طرف در ۲ ضرب می شود:

$$\underbrace{2\sin x\cos x}_{\downarrow} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \sin 2x = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{2} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

***در حل معادلات مثلثاتی میتوانیم از زوایای متمم کمک بگیریم و دو طرف را به یک نسبت تبدیل کنیم**

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

(تمرین ۳(ج) ص۴۸)

3ج)**معادله** $\sin x - \cos 2x = 0$ **را حل کنید.**

☑**حل:**

الف) روش اول:

$$\sin x = \cos 2x \xrightarrow{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x}$$

$$\sin x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 0 \to 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\to \begin{cases} \sin x = -1 \to x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \to \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

ب) روش دوم:

$$\sin x = \cos 2x \xrightarrow{\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2x \to 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \to x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \to x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل سوم

حد بی نهایت و حد در بی نهایت

❖ درس اول : حد بی نهایت

❖ درس دوم: حد در بی نهایت

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

بارم فصل ۳:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
۵	۲	۲

فصل ۳ درس ۱: حد بی نهایت

بخش پذیری چند جمله‌ای ها بر $(x-a)$:

$$\begin{array}{l|l} \overset{\text{مقسوم}}{f(x)} & x-a \ \text{مقسوم علیه} \\ \hline & Q(x) \ \text{خارج قسمت} \\ R \ \text{باقی مانده} & \end{array}$$

رابطه تقسیم $\rightarrow f(x)=(x-a)\times Q(x)+R$

*دررابطه تقسیم اگر به جای x بگذاریم a، داریم:

$$f(a)=\underbrace{(a-a)\times Q(a)}_{0}+R\rightarrow \boxed{f(a)=R}$$

*بنابراین برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم بدون انجام تقسیم ابتدا مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم ومقدار به دست آمده را در مقسوم به جای x گذاشته و حاصل را به دست می آوریم

*نتیجه:اگر $f(a)=0$ آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$بخش پذیر است.

(تمرین ۱ص ۵۷)

① الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+x^2+1$ بر دو جمله‌ای $x+1$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصلضرب عامل‌ها(تجزیه)بنویسید.

☑حل:

$x+1=0\rightarrow x=-1$

$f(-1)=2(-1)^3-(-1)^2+1=-2+1+1=0\rightarrow \boxed{R=0}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3}+x^2+1 & x+1 \\ \hline -\cancel{2x^3}-2x^2 & 2x^2-x+1 \\ \hline -\cancel{x^2}+1 & \\ \cancel{x^2}+x & \\ \hline \cancel{x}+\cancel{1} & \\ -\cancel{x}-\cancel{1} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2-x+1)$

(کار در کلاس۱و۳ ص۵۱)

① الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=3x^2-5x-2$ بر دو جمله‌ای $(x-2)$ بخش‌پذیر است.

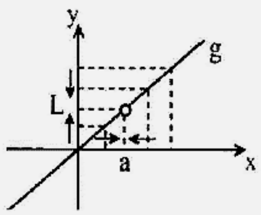
ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصلضرب عامل‌ها بنویسید.

③ نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر دو جمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر است.

*یادآوری مفهوم حد:

*حد یعنی نزدیک شدن بسیار زیاد به یک عدد، که به آن «میل کردن»می گوییم .

* به عبارتی حد یعنی وقتی مقدار x به a نزدیک می شود (میل می کند) مقدار y به چه عددی نزدیک می شود.(حد یعنی رفتار y تابع در مجاورت نقطه a)که به صورت $\lim_{x\to a} g(x)=l$ می نویسیم .



xاز سمت راست به a نزدیک می شود. $x\to a^+$

xاز سمت چپ به a نزدیک می شود. $x\to a^-$

xاز هردو سمت راست و چپ به a نزدیک می شود $x\to a$

*در هر سه مورد، x به aنزدیک می شود ولی به آن نمی رسد.

*شرایط وجود حداین است که تابع در چپ وراست a تعریف شده باشد و حد چپ و راست موجود و برابر باشد.

مای درس — گروه آموزشی — www.my-dars.ir

*حد تابع $\lim_{x\to a} g(x)=l$ به مقدار تابع $f(a)$ اصلا بستگی ندارد.

*برای تعیین حدتابع از روی نمودار ، ابتدا روی محور xها یک نقطه در سمت چپ و یک نقطه در سمت راست نقطه a انتخاب کرده و از آنها خطی عمود خارج می کنیم تا نمودار را قطع کند آنگاه نقاط را به محور y ها عمود و عرض نقطه را (حدودی) می خوانیم اگر عددها یکسان بود آنگاه تابع حد دارد.

حد توابع کسری:

* برای پیدا کردن حد یک کسر ، ابتدا به جای x مقدار a را قرار می دهیم که یکی از حالت های زیر به وجود می آید:

۱. $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}\neq 0}$ ۲. $\frac{0}{0}$ ۳. $\frac{\text{عدد}\neq 0}{0}$ ۴. $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{\text{عدد}}{\infty}$

۱. $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}\neq 0}$

اگربعد از جای گذاری مقدار a در x،حالت $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}\neq 0}$ را داشته باشیم آنگاه حاصل حد با همین عدد گذاری به دست می آید .

(مثال ص۵۱)

مقدار $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x+2}{x+1}$ را محاسبه کنید

☑حل:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\frac{25-15+2}{5+1}=\frac{12}{6}=2$$

۲. $\frac{0}{0}$

اگربعد از جای گذاری مقدار a در x،حالت $\frac{0}{0}$ (حالت مبهم) را داشته باشیم آنگاه برای به دست آوردن حاصل حد باید به یکی از ۳ روش زیر، رفع ابهام کنیم یعنی عامل صفر کننده $(x-a)$ را از صورت و مخرج پیدا و سپس حذف کنیم و از تابع ساده شده حد بگیریم:

الف) رفع ابهام با استفاده ازتجزیه(فاکتور گیری ، اتحادها)

ب) رفع ابهام با استفاده ازتقسیم

ج) رفع ابهام توابع رادیکالی با استفاده ازضرب در مزدوج یا چاق و لاغر

اتحاد مزدوج: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

اتحاد چاق و لاغر:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

الف) رفع ابهام با استفاده ازتجزیه(فاکتور گیری ، اتحادها)

(مثال ص۵۱)

مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ را محاسبه کنید

☑حل:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{1-1}{1+1-2}=\frac{0}{0}$$

$x\to 1\Rightarrow (x-1)$ عامل صفر کننده

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overset{\text{مزدوج}}{x^2-1}}{\underset{\text{جمله مشترک}}{x^2+x-2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

(کاردرکلاس الف ص۵۳)

مقدار $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+3x}$ را محاسبه کنید

ب) رفع ابهام با استفاده ازتقسیم

اگر به کمک فاکتور و اتحاد نتوانیم تجزیه کنیم از تقسیم کمک می گیریم.

(مثال ص۵۲)

مقدار $\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را محاسبه کنید

یا

حد تابع $f(x)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را در نقطه $x=-2$ درصورت وجود محاسبه کنید.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

☑ حل:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}\xrightarrow{x=-2}\frac{0}{0}$$

$x\to -2\Rightarrow (x+2)$ عامل صفر کننده

$$\lim_{x\to -2}\underbrace{\frac{\overset{\text{تقسیم}}{2x^3+3x^2+4}}{x^3+8}}_{\text{مکعب مجموع(چاق و لاغر)}}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(2x^2-x+2)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}=\frac{8+2+2}{4+4+4}=1$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3}+3x^2+4 & x+2 \\ \hline \cancel{-2x^3}-4x^2 & 2x^2-x+2 \\ \cancel{-x^2}+4 & \\ \cancel{x^2}+2x & \\ \cancel{2x}+\cancel{4} & \\ \cancel{-2x}-\cancel{4} & \\ 0 & \end{array}$$

$$2x^3+3x^2+4=(x+2)(2x^2-x+2)$$

(کاردرکلاس ب ص ۵۳)

مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$ را محاسبه کنید

(تمرین ۲ ص ۵۷)

② حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-x}{4x^2-1}$

ب) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-4x^2-4x-5}{x^2-25}$

پ) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4}$

ج) رفع ابهام توابع رادیکالی با استفاده ازضرب در مزدوج یا چاق و لاغر

اگر عبارت رادیکالی با فرجه ۲ در صورت یا مخرج داشتیم آن را در مزدوجش ضرب می کنیم واگر عبارت رادیکالی با فرجه ۳ در صورت یا مخرج داشتیم آن را در چاق یا لاغرش ضرب می کنیم .

(مثال ص۵۲)

۱)حد تابع $g(x)=\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه به طول $x=5$ درصورت وجود محاسبه کنید.

☑ حل:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}=\frac{0}{0}\longrightarrow x\to 5\Rightarrow \overset{\text{عامل صفر کننده}}{(x-5)}$$

$$\lim_{x\to 5}\overset{\text{ضرب در مزدوج}}{\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(2+\sqrt{x-1})}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

۲)حد تابع $h(x)=\dfrac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$ را در $x=8$ درصورت وجود محاسبه کنید.

☑ حل:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{0}{0}\to x\to 8\Rightarrow \overset{\text{عامل صفر کننده}}{(x-8)}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\overset{\text{فاکتور}}{x^2-8x}}{\underset{\text{ضرب در چاقش}}{\sqrt[3]{x}-2}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{x-8}}=8(4+4+4)=96$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

(کاردرکلاس ص ۵۳)

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

ت) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$

ث) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}$

ج) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}$

(تمرین ۳ص ۵۷)

③ حدود زیر را در صورت وجود، به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}$

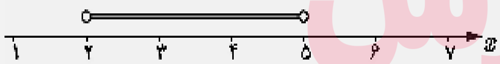
پ) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x+16}{\sqrt[3]{x}+2}$

همسایگی و انواع آن:

***تعریف همسایگی:**

همسایگی عددی مثل x_0، یک بازه باز (a,b) است.

به طورمثال، همسایگی عدد ۳ بازه $(2,5)$ می باشد



البته بیشمار همسایگی اطراف عدد ۳ داریم مثل بازه های

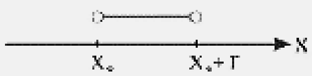
$(2,5),(2,4),(0,4),(1,4),(2/5,3/5),...$

***انواع همسایگی:**

۱.همسایگی راست ۲.همسایگی چپ ۳.همسایگی محذوف

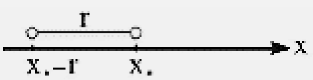
۱.همسایگی راست:

همسایگی راست عددی مثل x_0، یک بازه باز (x_0,x_0+r) است .



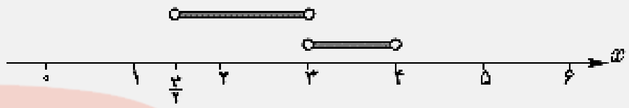
۲.همسایگی چپ:

همسایگی چپ عددی مثل x_0، یک بازه باز (x_0+r,x_0) است .



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

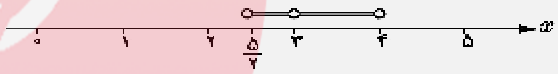
به طورمثال، همسایگی راست عدد ۳ بازه $(۳,۴)$ و همسایگی چپ عدد ۳ بازه $\left(\frac{۳}{۲},۳\right)$ می باشد



۳.همسایگی محذوف

همسایگی محذوف عددی مثل $x_۰$، مجموعه $(a,b)-\{x_۰\}$ است یعنی حذف $x_۰$از بازه (a,b)

به طورمثال، همسایگی محذوف عدد ۳ مجموعه $\left(\frac{۵}{۲},۴\right)-\{۳\}$ می باشد



حدنامتناهی:

*می دانیم که شرط وجود حد اینست که حد چپ و راست موجود و برابر باشد.

*حد $+\infty,-\infty$ اعدادحقیقی نیستند و یک نماد محسوب می شوند حال اگر جواب حدی، مساوی بی نهایت (∞)شود، می گوییم آن حد ، نامتناهی است. وتابع در آن نقطه حد ندارد.

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

و از $+\infty,-\infty$ به خاطر این استفاده می کنیم که بگوییم $f(x)$از هر مقدار مثبتی بزرگ تر $(+\infty)$یا از هر مقدار منفی کوچکتر $(-\infty)$می شود

***مفهوم رابطه** $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$:

به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد به شرطی که x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شودو تابع درهمسایگی محذوف a تعریف شده باشد.

***مفهوم رابطه** $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$:

به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد به شرطی که x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شودو تابع درهمسایگی محذوف aتعریف شده باشد.

***مفهوم رابطه** $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$:

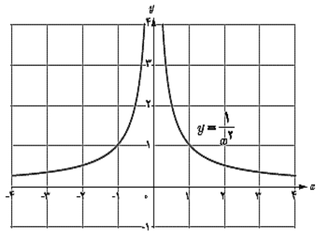
به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ ترکرد به شرطی که xبا مقادیر بزرگ تر از a به قدر کافی به aنزدیک اختیار شود.

محاسبه حدهای نامتناهی دو طرفه از روی شکل:

(مثال ص ۵۴ و۵۶)

حد چپ و راست هر دو $+\infty$

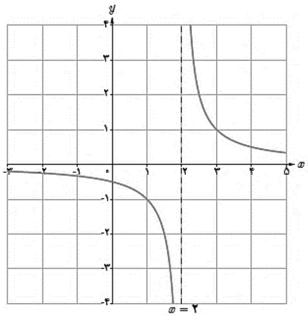
$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$$



حد راست $+\infty$ حد چپ $-\infty$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x-۲}=+\infty$$

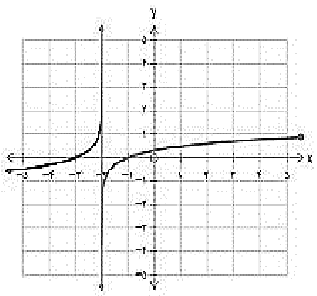
$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{۱}{x-۲}=-\infty$$



حدراست $-\infty$ حدچپ $+\infty$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=+\infty$$



(تمرین ص ۵۷)

5 الف) عبارت $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=+\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید

مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

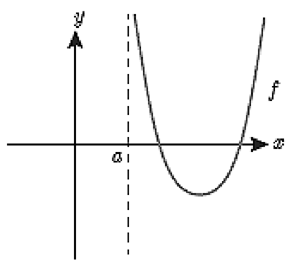
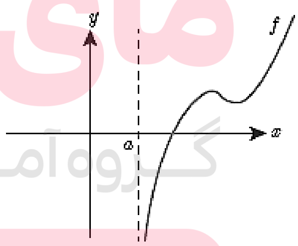
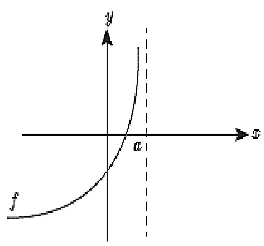
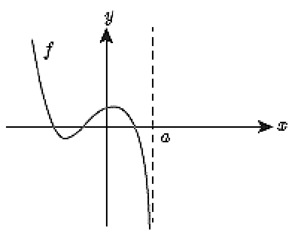
☑ حل:

یعنی می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد به شرطی که x با مقادیر کوچکتر از ۲ به ۲ نزدیک اختیار شود.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟

محاسبه حدهای نامتناهی یک طرفه از روی شکل: (ص ۵۵)

حد راست $+\infty$	حدراست $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ 	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ 
حدچپ $+\infty$	**حد چپ $-\infty$**
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ 	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ 

محاسبه حد نامتناهی از روی ضابطه:

۳. $\boxed{\dfrac{\text{عدد}\neq 0}{0}}$

اگربعد از جای گذاری مقدار a در x، حالت $\dfrac{\text{عدد}\neq 0}{0}$ را داشته باشیم آنگاه حاصل حد ، ∞ است .

※توجه: در اینجا مخرج صفر نمی شود بلکه حد صفر دارد.

برای علامت ∞ به علامت صورت و مخرج توجه می کنیم :

$$\frac{\text{عددمثبت}}{0^-} = -\infty \qquad \frac{\text{عددمثبت}}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عددمنفی}}{0^-} = +\infty \qquad \frac{\text{عددمنفی}}{0^+} = -\infty$$

※توجه: برای علامت صفر مخرج ، باید مخرج را تعیین علامت کنیم.

(کاردرکلاس او تمرین۴ ص ۵۷)

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \dfrac{۲x}{x-۵} =$

☑ حل:

$$\lim_{x\to ۵^-} \frac{۲x}{x-۵} = \frac{۱۰}{۰^-} = -\infty$$

۲) $\lim\limits_{x\to ۵^+} \dfrac{۲x}{x-۵}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{۱}{x}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{۱}{x-۱}$

۵) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} \dfrac{-۳x}{x^۲-۴} =$

☑ حل:

$$\lim_{x\to (-۲)^-} \frac{-۳x}{x^۲-۴} = \frac{۶}{۰^+} = +\infty$$

مای درس گروه آموزشی عصر www.my-dars.ir

۶) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{۱-۵x}{x^۲-۹}$

۷) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{-۱}{(x-۳)^۴} =$

☑ حل:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{-۱}{(x-۳)^۴} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

چون کل مخرج توان زوج دارد پس ۰^+ است

۸) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} \dfrac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}$

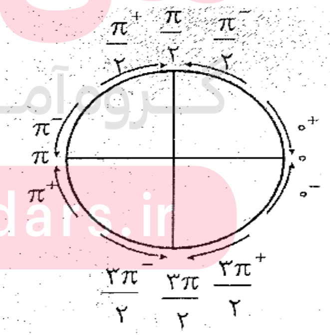
۹) $\lim\limits_{x\to -۶} \dfrac{۹}{(x+۶)^۲}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{-۱}{x^۲}$

۱۱) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x =$

☑ حل:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$



با توجه به دایره مثلثاتی ،

cos در ربع اول مثبت است

پس ۰^+ است

۱۲) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \dfrac{۱}{\cos x}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x$

۱۴) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x+۱}{\sin^۲ x}$

۱۵) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{-۱}{|x|} =$

☑ حل:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{|x|} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

چون مخرج قدر مطلق داردپس ۰^+ است

۱۶) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۲}{|x-۳|}$

***یادآوری:**

$$\lim_{x\to a} \underset{\downarrow}{[x]} \xrightarrow{n<x<n+۱} n$$
$x \notin Z$

$$\lim_{x\to a} \underset{\downarrow}{[x]} \to \begin{cases} x\to a^+ \xrightarrow{\text{حد}} a \\ x\to a^- \xrightarrow{\text{حد}} a-۱ \\ x\to a \xrightarrow{\text{حد}} \times \end{cases}$$
$x \in Z$

۱۷) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{[x]-۳}{x-۳}$

☑ حل:

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳} = \frac{۲-۳}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} + \infty$$

$$\lim_{x\to ۳^-} [x] = ۲$$

۱۸) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۳}} \dfrac{[x]}{|۳x+۱|}$

۱۹) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \dfrac{[x]-۳}{|۲x-۱|}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل ۳ درس ۲: حد در بی نهایت

حد در بی نهایت:

*حد تابع وقتی $x \to \infty$، به یکی از دو صورت زیر است:

۱) صفر یا عددی غیر صفراست.

۲) $+\infty$ یا $-\infty$ است(حد وجود ندارد)

***مفهوم رابطه** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$:

به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می توان به Lنزدیک کرد به شرطی که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.و تابع در بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد.

***مفهوم رابطه** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$:

به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می توان به L نزدیک کرد به شرطی که x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود. وتابع در بازه $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد.

***مفهوم رابطه** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

به این معناست که $f(x)$را می توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد به شرطی که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.و تابع در بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد.

***مفهوم رابطه** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$:

به این معناست که $f(x)$را می توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک ترکرد به شرطی که x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود. وتابع در بازه $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد.

*رابطه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$:

به این معناست که.........................

*رابطه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$:

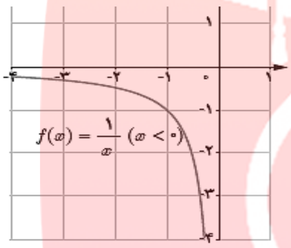
به این معناست که.........................

محاسبه حد در بی نهایت از روی شکل:

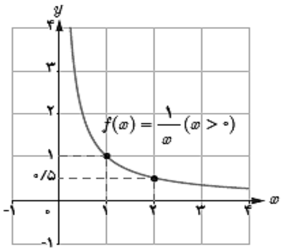
*وقتی تابع در $x \to \infty$ حد دارد نمودار آن در بی نهایت به خط افقی $y = L$ میل می کند

(مثال ص ۵۸ و۵۹ و۶۱)

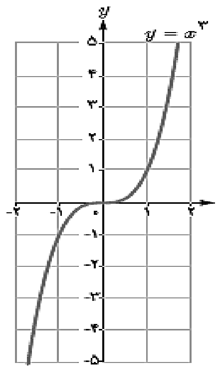
با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بیابید.



$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۱}{x} =$



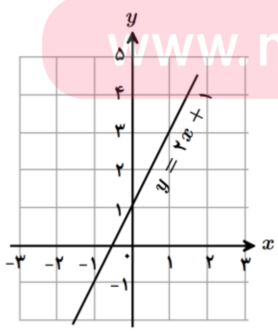
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۱}{x} =$



$\lim\limits_{x\to+\infty} x^۳ =$

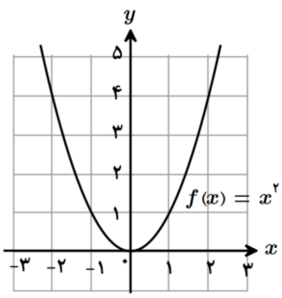
(کار در کلاس ص۶۲)

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} (۲x+۱) = ...$

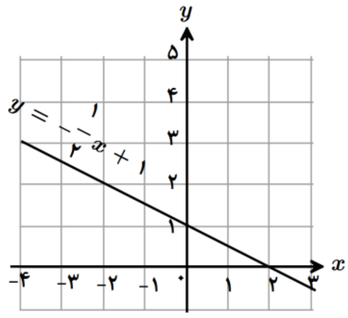
$\lim\limits_{x\to+\infty} (۲x+۱) = ...$

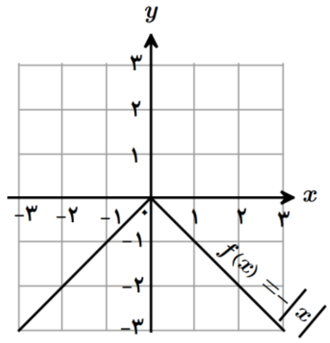


الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^۲ = ...$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^۲ = ...$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir



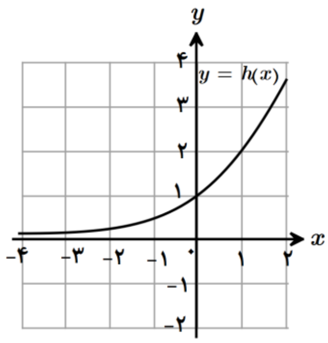


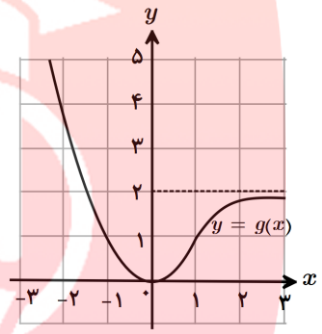
ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{-1}{2}x + 1) = \dots\dots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{-1}{2}x + 1) = \dots\dots$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dots$





ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \dots\dots$

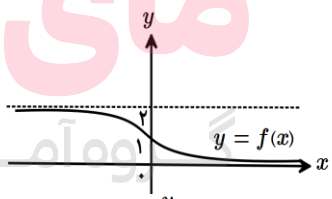
$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \dots\dots$

ث) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \dots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dots$

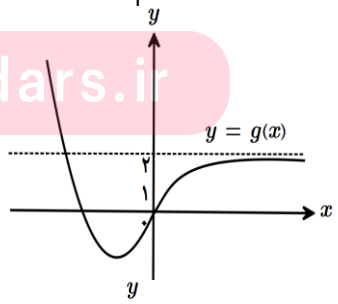
(تمرین ۲و۳ص۶۴)

2 با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.



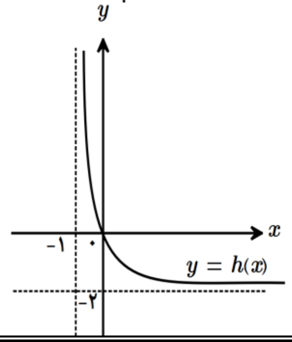
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dots$



$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \dots$

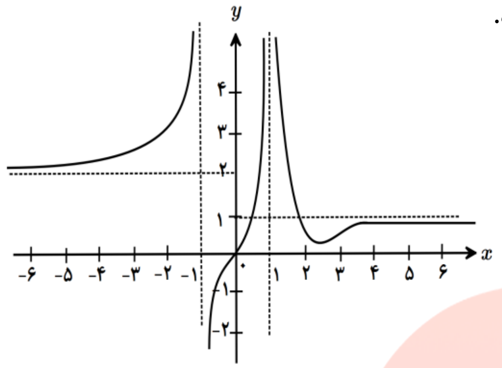
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dots$



$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \dots$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x) = \dots$

3 نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ث)

(تمرین ۱ص۶۳)

1 نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به‌دست آورید.

الف)

$f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) =$

ب)

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

$$g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=$

(تمرین ۵ ص ۶۴)

⑤ الف) هر یک از رابطه‌های زیربه چه معنا هستند؟

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

محاسبه حد در بی نهایت از روی ضابطه:

۴. $\dfrac{\text{عدد}}{\infty}$ و $\dfrac{\infty}{\infty}$

*** قضیه ۱:**

اگر n عدد طبیعی باشد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

***قاعده پرتوان در توابع چند جمله ای:**

وقتی $x\to\infty$ است می توانیم به جای کل عبارت بزرگترین توان x را با ضریبش نگه داریم و بقیه را نادیده بگیریم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} ax^n$$

*** قضیه ۲:**

اگر n عدد طبیعی و a عدد حقیقی غیر صفرباشد:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & (a \text{ مثبت})\\ -\infty & (a \text{ منفی})\end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت})\\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی})\\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت})\\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی})\end{cases}$

***قاعده پرتوان در توابع کسری:**

وقتی $x\to\infty$ است می توانیم در صورت و مخرج به جای کل عبارت بزرگترین توان x را با ضریبش نگه داریم و بقیه را نادیده بگیریم. آنگاه:

الف)اگر درجه صورت و مخرج برابر باشد حد داریم و حد، عددی غیر صفر است

ب) اگر درجه صورت ازمخرج بیشتر باشد حد نداریم یعنی حاصل $-\infty$ یا $+\infty$ می شود

ج)اگر درجه مخرج ازصورت بیشتر باشد حد داریم و حد، عدد صفر است

(کار در کلاس ومثال ص ۶۰و۶۳تمرین ۴ ص ۶۴)

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2-4x+1}{3x^2+5x-6}$

☑حل:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2-4x+1}{3x^2+5x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2}{3x^2}=\frac{7}{3}$$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{x-1}$

۳) $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1-5t^2}{t^2+3t}$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$

۵) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{3x+1}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۶) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+5x-3}$

۷) $\lim_{x\to -\infty} \frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}$

۸) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{2-3x}$

۹) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{2x-3}$

۱۰) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8}$

۱۱) $\lim_{x\to -\infty} (9+\frac{7}{x^3})$

۱۲) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}-5}$

۱۳) $\lim_{x\to +\infty} \left(2x-3+5x^2\right)$

۱۴) $\lim_{x\to +\infty} (-\frac{1}{2}x^3+7x^2-6)$

۱۵) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x}{3-x}$

۱۶) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{4}$

۱۷) $\lim_{x\to -\infty} \left(-2x^3+4x^2-5x-9\right)$

۱۸) $\lim_{x\to -\infty} \frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$

۱۹) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^5-6x^3-x}{x^2-5x+1}$

(کار در کلاس ۲ص۶۰)

②الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل چهارم

مشتق

- درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق
- درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی
- درس سوم: آهنگ تغییر

گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

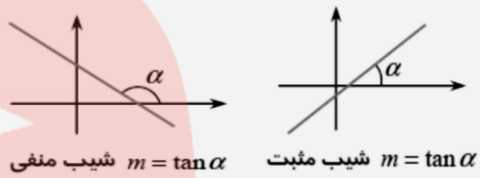
بارم فصل ٤:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
۳ تا صفحه ٧٦	۵	۵

فصل ٤ درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

یادآوری شیب خط:

*شیب خط، تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محورxها می سازد.

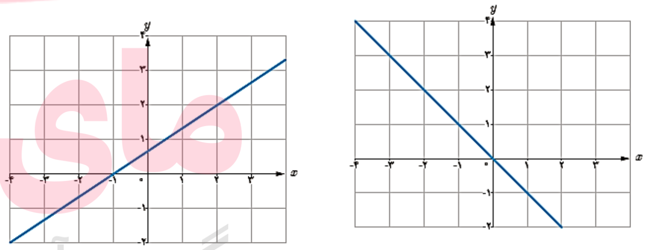


* برای به دست آوردن شیب و معادله خطی که از دو نقطه می گذرد از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad y = m(x - x_1) + y_1$$

(فعالیت ۱ص۶۶)

① شیب هر یک از خط های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



خط مماس بر منحنی:

خط مماس دارای شرایط زیر است:

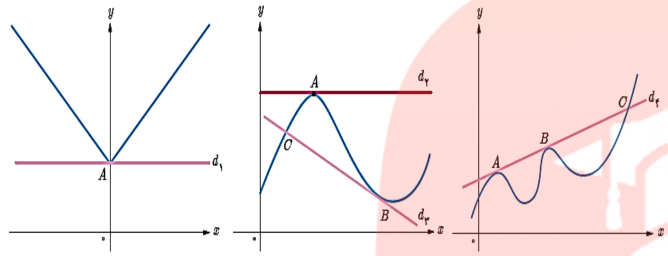
۱.منحنی در نقطه تماس باخط ، تیز و گوشه دار نباشد.

۲. منحنی در نقطه تماس باخط ، توخالی نباشد.(منحنی پیوسته باشد)

۳. منحنی در نقطه تماس باخط ، فقط دریک نقطه مشترک باشد.(مماس قائم نداشته باشد)

(مثال۱ص۶۷)

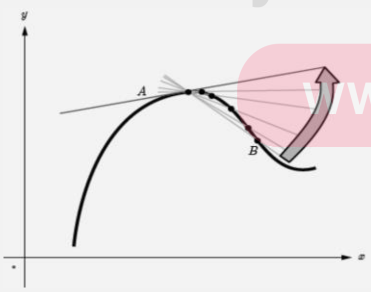
خط های d_1 تا d_4را درنظربگیرید و خط های مماس را مشخص کنید.



شیب خط مماس بر منحنی:

*در نمودار تابع $y = f(x)$ نقطه $A(a, f(a))$ را روی منحنی در نظر می گیریم .خط هایی که از A به نقاط دیگر منحنی وصل می کنیم را یک خط قاطع می نامیم.هرچه نقطه Bبه Aنزدیک تر باشد، خط قاطع AB به خط مماس شبیه تر می شود

*نزدیک شدن نقطهAبه نقطه B ، مثل مفهوم میل کردن در حد است .بنابراین خط مماس ، حد خط های قاطع است به شرطی که $B \to A$میل کند



*شیب خط مماس همان حد شیب خط قاطع است وقتی که $B \to A$ میل می کند.

*مشتق هم همان شیب خط مماس است

مای درس
گروه آموزشی ...
www.my-dars.ir

***شیب خط مماس مورب(مایل):**

۱)اگر خط مماس با جهت مثبت محور x ها زاویه تند بسازد، شیب مثبت است و هر چه خط عمودی تر شود شیبش بیشتر می شود

۲)اگر خط مماس با جهت مثبت محور xها زاویه باز بسازد، شیب منفی است و هر چه خط عمودی تر شود شیبش کمتر می شود

***شیب خط مماس قائم(موازی محور y ها):**

اگر خط با جهت مثبت محور xها زاویه قائمه (90°) بسازد، شیب تعریف نشده است

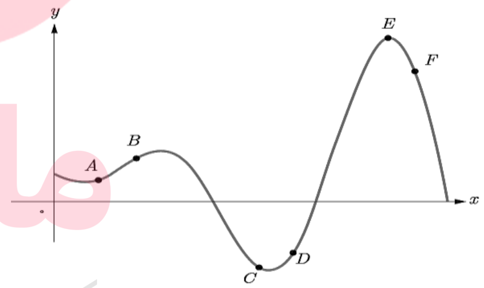
***شیب خط مماس افقی(موازی محور x ها):**

اگر خط با جهت مثبت محور xها زاویه نیم صفحه (180°) بسازد، شیب صفراست

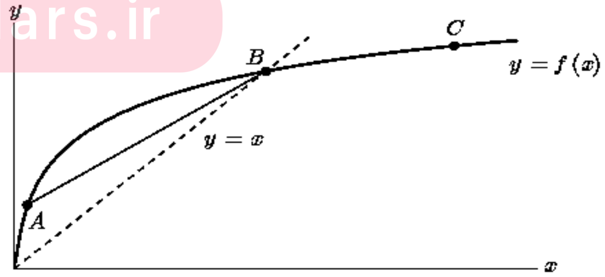
(تمرین ۲و۳و۴و۵و۷ص ۷۵)

② نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

نقطه	شیب
	-۳
	-۱
	۰
	$\frac{1}{2}$
	۱
	۲



③ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

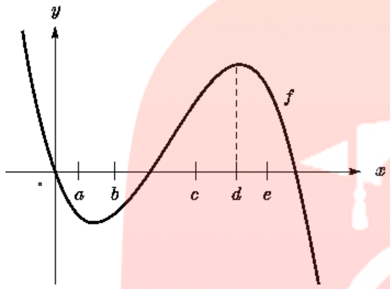
ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 و m_2 و ... و m_6 در نظر بگیرید.

④ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های d,c,b,a و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵
	-۲

⑦ نقاط E,D,C,B,A و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

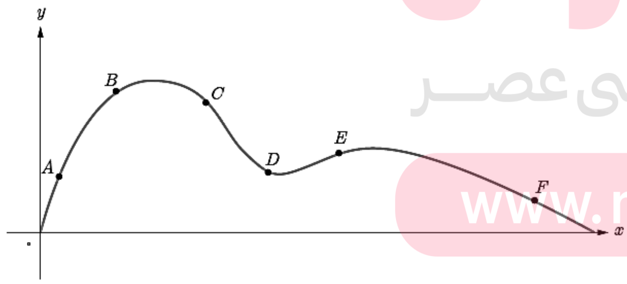
ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E < m_B < m_A$

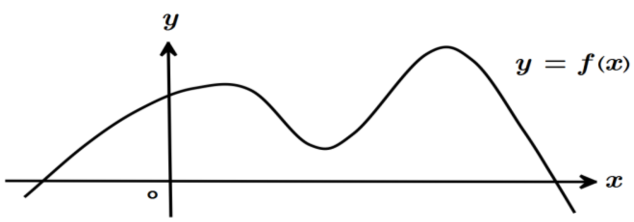
ت) شیب منحنی در نقاط D,F و C منفی است.

ث) $m_F < m_D < m_C$

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$



⑤ نقاطی مانند F,E,D,C,B,A و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

تعریف مشتق تابع f در نقطه a :

*مشتق تابع f در نقطه a که آن را با $f'(a)$ نشان می دهیم برابراست با شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ مقدار آن را از رابطه های زیر می یابیم:

$$* \ f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

*در موقعیت های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

* حدهای تعریف مشتق همیشه دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است و باید آن را رفع ابهام کنیم.

(مثال ص ۷۲)

مشتق تابع $f(x)=-x^2+10x$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول $x=3$ به دست آورید.

☑حل:

مقدار تابع: $f(3)=-3^2+10(3)=-9+30=21$

مشتق تابع: $f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+10x-21}{x-3}\xrightarrow{x=3}\frac{0}{0}$$

رفع ابهام: $\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(-x+7)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}(-x+7)=4$

$\to \boxed{f'(3)=4}$

(مثال ص ۷۳)

اگر $f(x)=x^2$، $f'(3)$ را به دو روش به‌دست آورید.

☑حل: روش اول:

مقدار تابع: $f(3)=3^2=9$

مشتق: $f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}$

رفع ابهام: $\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$

$\to \boxed{f'(3)=6}$

روش دوم:

$$\begin{cases} f(3)=3^2=9 \\ f(3+h)=(3+h)^2=h^2+6h+9 \end{cases}$$

مشتق: $f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h\cancel{+9}\cancel{-9}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h}{h}=\frac{0}{0}$$

رفع ابهام: $\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+6)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(h+6)=6$

$\to \boxed{f'(3)=6}$

(تمرین ۶ ص ۷۶)

⑥ اگر $f(x)=x^3-2$، $f'(-1)$ را به‌دست آورید.

مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

معادله خط مماس بر منحنی:

*معادله خط مماس بر منحنی شبیه معادله خط می باشد بنابراین:

$$y = m(x - x_1) + y$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

شیب مماس (مشتق) — طول نقطه — عرض نقطه

(مثال ص ۷۲)

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

☑حل:

ابتدا باید شیب مماس که همان مشتق تابع است را بیابیم.

مقدار تابع: $f(2) = -2^2 + 10(2) = -4 + 20 = 16$

مشتق تابع: $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{-x^2 + 10x - 16}{x - 2} \xrightarrow{x=2} \frac{0}{0}$

رفع ابهام: $\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(-x+8)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(-x+8) = 6$

$\to \boxed{f'(2) = 6}$

حالا با توجه به شیب (6) و نقطه $(2,16)$ معادله خط مماس را می نویسیم:

$y = 6(x-2) + 16 \to \boxed{y = 6x + 4}$

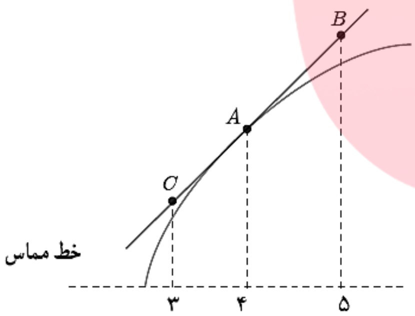
(کار در کلاس ص۷۲)

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

(تمرین ۱ و ۸ ص ۷۵)

① اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

⑧ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A, B و C را بیابید.



☑حل:

$f(4) = 25 \to A(4, 25)$

$f'(4) = 1/5$

$AC \to 1/5 = \frac{y_c - 25}{3 - 4} \to y_c = 23/5$

$AB \to 1/5 = \frac{y_B - 25}{5 - 4} \to y_5 = 26/5$

$B\left|\begin{matrix}5\\26/5\end{matrix}\right.$ $\quad C\left|\begin{matrix}3\\23/5\end{matrix}\right.$

مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

فصل ٤ درس ٢: مشتق پذیری و پیوستگی

مشتق پذیری تابع:

*مشتق همان شیب خط مماس است پس اگر تابع در یک نقطه شرایط خط مماس (درس ۱) را داشت می گوییم تابع در آن نقطه مشتق پذیر است.

*برای آنکه تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱.تابع پیوسته باشد

۲. مشتق چپ و راست موجود و برابر باشد(عددباشد)

مشتق چپ و مشتق راست:

*مشتق چپ: همان شیب نیم مماس چپ در یک نقطه است. که به صورت زیر نمایش می دهیم:

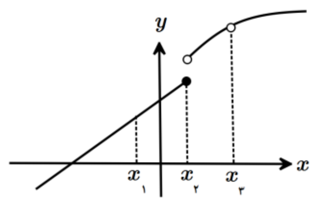
$$f'_-(a) == \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

*مشتق راست: همان شیب نیم مماس راست در یک نقطه است. که به صورت زیر نمایش می دهیم:

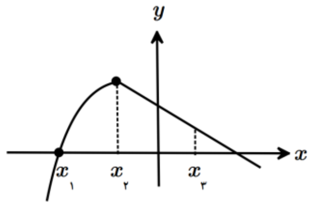
$$f'_+(a) == \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(کار در کلاس ص۸۲)

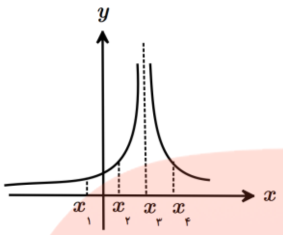
در شکل های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.

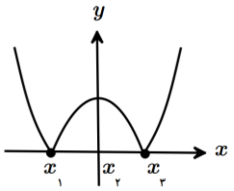


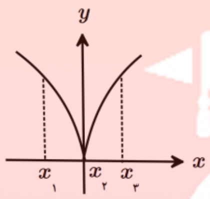
☑حل: نقاط x_2, x_3 ، زیرا در این نقاط ناپیوسته است.

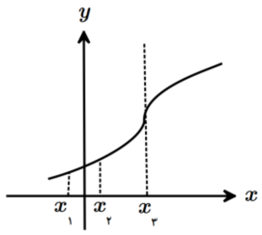


☑حل: نقطه x_3، زیرا نقطه گوشه ای است









☑حل: نقاط x_2, x_3 ، زیرا مماس قائم دارد.

(تمرین ۴ ص ۹۰)

④ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن :

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.	ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.
پ) در تمام نقاط مثبت باشد	ت) در تمام نقاط یکسان باشد.
ث) در تمام نقاط منفی باشد.	

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

مشتق پذیر نبودن تابع به دلیل ناپیوستگی:

اگر تابع در $x=a$ پیوسته نباشد، مشتق هم ندارد (چون نمی توانیم مماس رسم کنیم).بنابراین هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است توابع ناپیوسته مثل:

۱.توابع چند ضابطه ای در نقاط مرزی دامنه

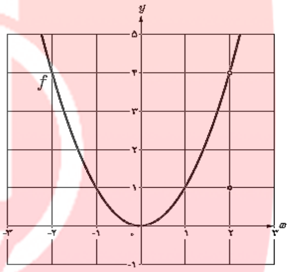
۲.توابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح

۳.توابع $f(x)=\sqrt{x}$ درصفر

(فعالیت ص۷۷)

با استفاده از تعریف مشتق ،مشتق‌پذیری تابع f را در نقطه $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\neq ۲\\ ۱ & x=۲\end{cases}$$



☑حل:

$f(۲)=۱$

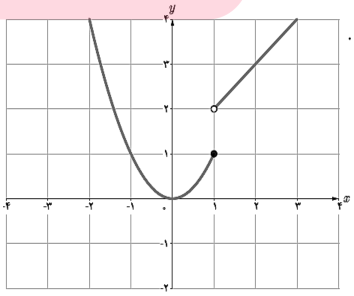
$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x^۲-۱}{x-۲}=\dfrac{۳}{۰^-}=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x^۲-۱}{x-۲}=\dfrac{۳}{۰^+}=+\infty\end{cases}\rightarrow$$

$f'(۲)=$ وجود ندارد

(کار در کلاس ص۷۸)

با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع g را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

$$g(x)=\begin{cases}x^۲ & x\leq ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$$



(تمرین ۶ و۱۳ص ۹۱)

⑥ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲+۳ & x\geq ۱\\ ۲x & x<۱\end{cases}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

⑬ اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\leq ۰\\ x & x>۰\end{cases}$ نشان دهید $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

☑حل:

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲-۰}{x-۰}=۰$$

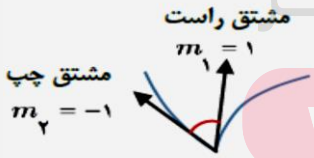
$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۰}{x-۰}=۱$$

$f'(۰)=$ وجود ندارد

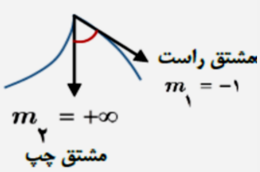
مشتق پذیر نبودن تابع به دلیل داشتن گوشه یا مماس قائم:

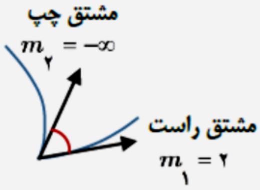
* هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته، مشتق پذیر نیست.یعنی توابعی وجود دارند که پیوسته اند ولی مشتق پذیر نیستند. و مشتق چپ و راست آنها به صورت زیر است:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند(نقطه گوشه ای)

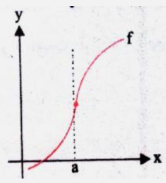


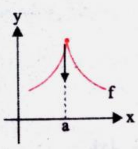
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه ای)





پ) هر دو نامتناهی باشند.





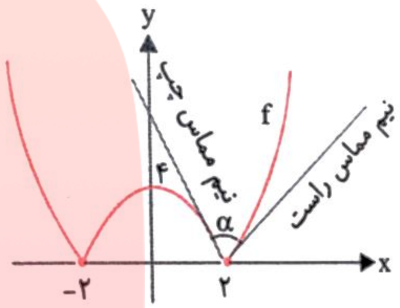
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

*تمام‌ریشه های داخل قدر مطلق نقاط شکستگی (گوشه ای، زاوای دار) تابعند، بنابراین برای تعیین تعدادنقاط مشتق ناپذیری‌باید تعدادریشه های ساده داخل قدر مطلق را مشخص کنیم.در نتیجه باید قدر مطلق را حذف و مشتق گیری کنیم.

(تمرین۸ص ۹۱)

⑧اگر $f(x)=\left|x^{2}-4\right|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

☑حل:



$$f'_{+}(2)=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{|x^{2}-4|-0}{x-2}=4$$

$$f'_{-}(2)=\lim_{x\to 2^{-}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^{-}}\frac{|x^{2}-4|-0}{x-2}=-4$$

$f'(2)=$ وجود ندارد

$$f'_{+}(-2)=\lim_{x\to(-2)^{+}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^{+}}\frac{|x^{2}-4|-0}{x+2}=-4$$

$$f'_{-}(-2)=\lim_{x\to(-2)^{-}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^{-}}\frac{|x^{2}-4|-0}{x+2}=4$$

$f'(-2)=$ وجود ندارد

(مثال ص ۷۹)

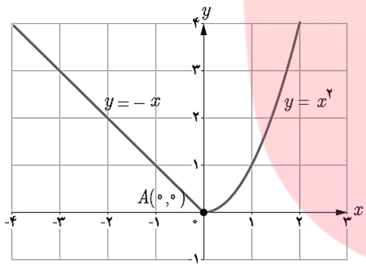
مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^{2}-1\right|$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.معادله نیم مماس های راست و چپ در $x=1$ را بنویسید.

(کار در کلاس ص۷۹)

نشان دهید که مشتق تابع $f(x)=\left|x^{2}-1\right|$ در $x=-1$ موجود نیست. معادله نیم مماس‌های راست و چپ را بنویسید.

(تمرین ۲ ص ۹۰)

②با محاسبه مشتق راست و چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.

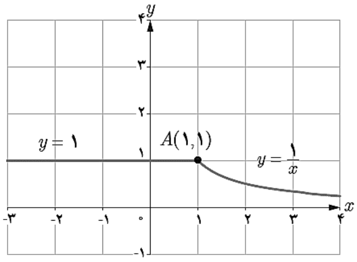


☑حل:

$A(0,0)$

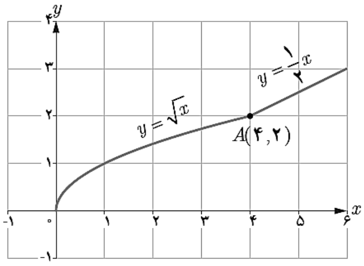
$$\begin{cases} f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{-x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}(-1)=-1 \\ f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x^{2}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}x=0 \end{cases}$$

$\vec{f}'(0)=$ وجود ندارد



(ب)

مای درس
گروه آموزشی هستر
www.my-dars.ir



(پ)

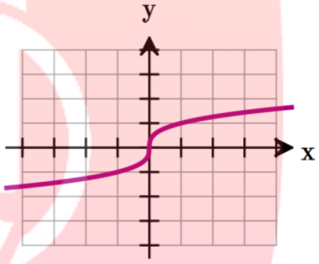
(مثال ص ۸۰)

مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

☑حل:

$f'(0)=+\infty$

مماس قائم دارد پس مشتق پذیر نیست



$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

(تمرین۹ ص ۹۱)

⑨ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را به‌دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

(تمرین۱ص ۹۰)

①دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

دامنه مشتق:

اگر $y=f(x)$ تابعی حقیقی باشد،آنگاه تابع مشتق به صورت زیرتعریف می شود:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ومجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آن ها f' موجود باشد را دامنه f' می نامیم.

$$D_{f'}=D_f-\{\text{نقاط مشتق ناپذیر}\}$$

(فعالیت ص ۸۲)

اگر $f(x)=x^2$،

الف) تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید.

ب) نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

(مثال ص ۸۴)

اگر $f(x)=\frac{1}{x}$،

الف)نمودار f را رسم کنید.

ب)تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید.

پ) $f'(3)$ را با استفاده از تابع مشتق وسپس تعریف مشتق بیابید

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

(کار در کلاس ص ۸۴)

اگر $f(x)=\begin{cases}5x & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$

الف) دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید

ب) ضابطه f' را به‌دست آورید.

پ)نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

(تمرین ۳ ص ۹۰)

③تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\leq x\leq 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ داده شده است .

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

محاسبه مشتق بدون استفاده از تعریف مشتق (قواعد مشتق):

۱. مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f(x)=c \rightarrow f'(x)=۰$$

۲. توان را در ضریب ضرب و یکی از توان کم می کنیم

$$f(x)=ax^{n} \rightarrow f'(x)=nax^{n-۱}$$

۳.(مشتق زیر رادیکال) ÷ (رادیکال × ۲)

$$f(x)=\sqrt{ax+b} \rightarrow f'(x)=\frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}$$

۴. $\dfrac{\text{مشتق زیر رادیکال}}{۳\times\sqrt[۳]{(\text{زیر رادیکال})^{۲}}}$

$$f(x)=\sqrt[۳]{x} \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

۵. مشتق اولی ±مشتق دومی

$$f(x)=f \pm g \rightarrow f'(x)=f' \pm g'$$

۶.ضریب در مشتق ضرب می شود.

$$f(x)=kf(x) \rightarrow f'(x)=kf'(x)$$

۷.مشتق اولی در دومی+مشتق دومی در اولی

$$f(x)=f.g \rightarrow f'(x)=f'.g+g'.f$$

۸.(مشتق صورت در مخرج − مشتق مخرج در صورت) ÷ مخرج به توان ۲

$$f(x)=\frac{f}{g} \rightarrow f'(x)=\frac{f'.g-g'.f}{g^{۲}}$$

(مثال ص۸۵ و۸۶ و۸۷)

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{-۲}{۵}$$
$$f(x)=۷$$
$$f(x)=x^{۲}$$
$$f(x)=x^{۳}$$
$$f(x)=\frac{۱}{x}$$
$$f(x)=\sqrt{x}$$
$$f(x)=-\frac{۲}{۳}x^{۴}$$
$$g(x)=x^{۵}+۴x^{۳}-\sqrt{۲}x+۱$$
$$h(x)=\left(۲x^{۳}+۱\right)\left(-x^{۲}+۷x-۲\right)$$
$$t(x)=\frac{x^{۲}-۴}{۳x+۱}$$

(کار در کلاس ص۸۷و تمرین ۱۴ ص۹۲)

① مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{۱}{x-۴}$

ب) $g(x)=\sqrt{x}\,(۳x^{۲}+۵)$

پ) $h(x)=\dfrac{x}{۲x^{۲}+x-۱}$

ب) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$

ت) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

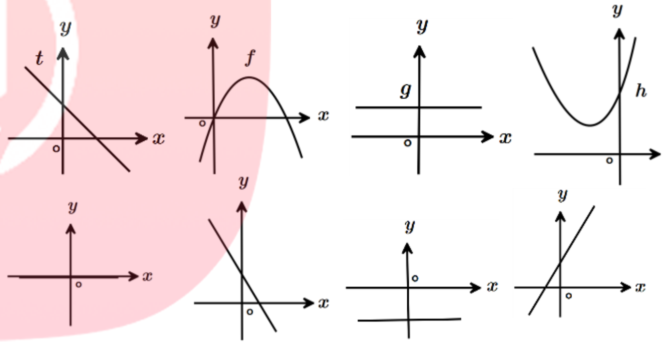
ث) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

② اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲) = ۳$ ، $f'(۲) = ۵$ ، $g(۲) = ۸$ و $g'(۲) = -۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به‌دست آورید.

(تمرین ۵ و ۷ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ ص ۹۱ و ۹۲)

⑩ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



⑦ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

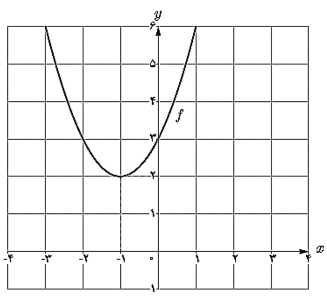
☑حل:

این مسئله بازپاسخ است، یکی از جواب ها می تواند به صورت زیر باشد:

$$f(x) = x \ , \ g(x) = x + ۱ \ , \ h(x) = x + ۲$$

⑤ الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(۳)$ و $f'(۰)$ و $f'(-۱)$ و $f'(۲)$

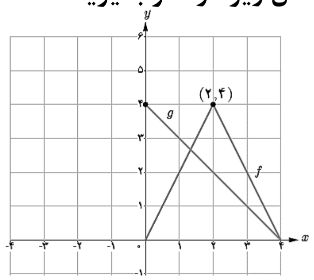


ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

⑫ اگر $f'(۱) = ۳$ و $g'(۱) = ۵$ مطلوب است، $(f + g)'(۱)$ و $(۳f + ۲g)'(۱)$

⑪ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.



الف) اگر $h(x) = f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$ ، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$ ، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

☑حل:

الف)

$$h'(x) = f'(x)\ g(x) + g'(x)\ f(x)$$

$$h'(۱) = ۲(۳) + (-۱)\ ۲ = ۴$$

$h'(۲) =$ وجود ندارد

$$h'(۳) = (-۲)۱ + (-۱)۲ = -۴$$

ب)

$$k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

$$k'(۱) = \frac{۲(۳) - (-۱)(۲)}{۹} = \frac{۸}{۹}$$

$k'(۲) =$ وجود ندارد

$$k'(۳) = \frac{(-۲)۱ - (-۱)۲}{۱} = ۰$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

مشتق تابع مرکب- قاعده زنجیری:

*قاعده زنجیری (یعنی شروع از داخلی ترین تابع و مثل زنجیر، مشتق ها را در هم ضرب می کنیم)

*رابطه مشتق تابع fog :

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$

(مثال وکار در کلاس ص۸۸ و تمرین ۱۴ ص ۹۲)

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $h(x)=(x^2+3x+1)^7$

☑حل:

$$h'(x)=(2x+3)(7)(x^2+3x+1)^6$$

۲) $y=\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5$

☑حل:

$$\frac{2x(3x-1)-3x^2}{(3x-1)^2}.5(\frac{x^2}{3x-1})^4=5(\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2})(\frac{x^2}{3x-1})^4$$

۳) $f(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$

۴) $g(x)=(\frac{-3x-1}{x^2+5})^8$

۵) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^3$

مشتق پذیری روی یک بازه:

*تابع f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

*تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه f در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد ودر نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

*اگر $D_f=\mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty,+\infty)$ مشتق‌پذیر است.

(کار در کلاس ص ۸۹)

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

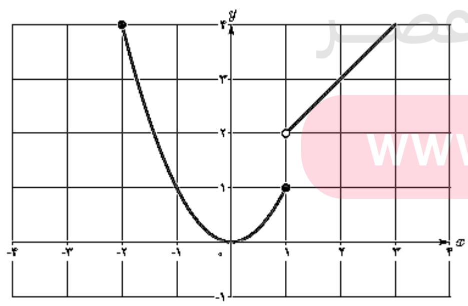
تابع f روی بازه $[a,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه ....

تابع f روی بازه $(a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه ....

(مثال ص ۸۹)

اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & -2\le x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-2,1]$، $(1,+\infty)$ و $[1,2]$ بررسی کنید.

☑حل:



*تابع در بازه $[-2,1]$ مشتق پذیر و مشتق آن $2x$است

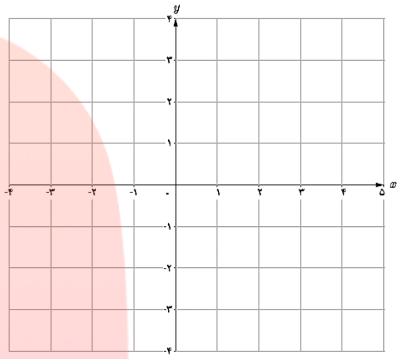
* تابع در بازه $(1,+\infty)$ مشتق پذیر و مشتق آن ۱ است

*تابع در بازه $[1,2]$مشتق پذیر نیست زیرا در $x=1$ پیوسته نیست و مشتق ندارد

های درس گروه آموزشی عصر www.my-dars.ir

(کار در کلاس ص ۸۹)

اگر $f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<2\\ -x+5 & 2<x<5\end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-1,1]$، $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.



مشتق مرتبه دوم:

* از تابع $y=f(x)$:

۱.اگریک بار مشتق بگیریم ،مشتق مرتبه اول به دست می آید و داریم: $y'=f'(x)$ و می خوانیم اف پریم.

۲.اگردو بار مشتق بگیریم،مشتق مرتبه دوم به دست می آید و داریم: $y''=f''(x)$ و می خوانیم اف زگوند.

(مثال ص ۹۰ و تمرین ۱۵ ص ۹۲)

در تابع $f(x)=3x^4+2x^2-1$ حاصل $f''(x)$ را بیابید.

☑حل:

$$y'=12x^3+4x \quad , \quad y''=36x^2+4$$

⑮ اگر $f(x)=5x^3-4x^2-3x$، مقدار $f''(-1)$ را به‌دست آورید.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل ٤ درس ۳: آهنگ تغییر

آهنگ تغییر متوسط :

※ آهنگ تغییر متوسط با شیب خط قاطع برابر است و رابطه آن به صورت زیر است:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \text{آهنگ تغییر متوسط}$$

آهنگ تغییر لحظه ای :

※ آهنگ تغییرلحظه ای با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابراست و رابطه آن به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \text{آهنگ تغییرلحظه ای}$$

(تمرین ص۱۰۰ و۹۹)

④ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^{2}-t+10$ است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0,5]$ با هم برابرند؟

☑حل:

$$f'(t)=2t-1 \to 2t-1=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}$$

$$\to 2t-1=\frac{30-10}{5}=4 \to t=2/5s$$

⑦یک توده باکتری پس از tساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^{3}$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \le t \le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

⑧ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^{2}$ به‌دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

① جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

الف) ازساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به‌دست آورید.

☑حل:

$$\frac{T(۱۲)-T(۸)}{۱۲-۸}=\frac{۱۹-۱۱}{۴}=۲C/h$$

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید.

☑حل:

$$\frac{T(۱۸)-T(۱۲)}{۱۸-۱۲}=\frac{۹-۱۹}{۶}=-۱/۶۷C/h$$

پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

☑حل:

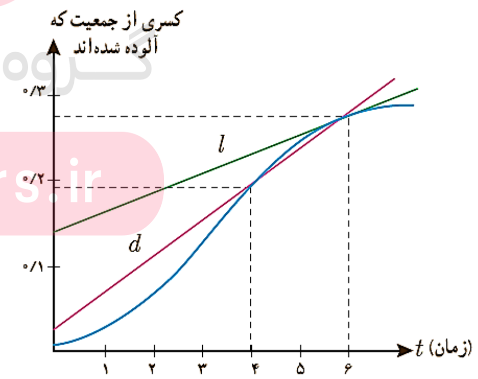
از صبح ساعت ۸ تا ۱۲ درجه حرارت با سرعت متوسط ۲ سانتی گراد بر ساعت در حال افزایش است و از ساعت ۱۲ تا ۱۸درجه حرارت با سرعت متوسط $-۱/۶۷$ سانتی گراد بر ساعت در حال کاهش می باشد.

2) کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=۱$, $t=۲$ یا $t=۳$ بیشتر است؟

پ) قسمت ب را برای $t=۴$, $t=۵$ و $t=۶$ بررسی کنید.



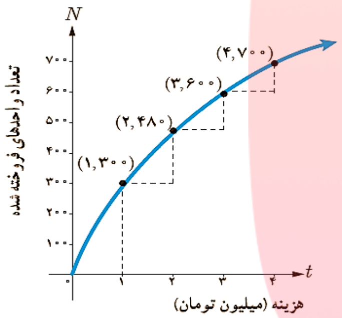
☑حل:

الف)شیب خط l سرعت آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در پایان هفته ششم(سرعت لحظه ای در $t=۶$)و شیب خط d سرعت متوسط آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در بین هفته های چهارم تا ششم(آهنگ تغییر متوسط در بین لحظات ۴ تا ۶ هفته) را نشان می دهد.

ب) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان های $t=۱, t=۳$ در حال افزایش است.

پ) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان های $t=۶ , t=۴$ در حال کاهش است.

3) نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.



الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

☑حل:

$$\frac{N(۱)-N(۰)}{۱-۰}=\frac{۳۰۰-۰}{۱}=۳۰۰$$

$$\frac{N(۴)-N(۳)}{۴-۳}=\frac{۷۰۰-۶۰۰}{۱}=۱۰۰$$

$$\frac{N(۲)-N(۱)}{۲-۱}=\frac{۴۸۰-۳۰۰}{۱}=۱۸۰$$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

☑حل:

با توجه به شیب خطوط قاطع که در حال کم شدن است بنابراین آهنگ تغییر درحال کاهش می باشد.

هزینه های تبلیغات تا یک اندازه مشخص در فروش کالا اثرگذار است .افزایش بیش ازحد هزینه تأثیر بسزایی در میزان فروش ندارد.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

⑥ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[\cdot,1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=\cdot$ و هم $f(a)=\cdot$

⑤ توپی از یک پُل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. براساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

الف) $1/23\ m/s$ — ب) $14/91\ m/s$

پ) $11/5\ m/s$ — ت) $16/03\ m/s$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل پنجم

کاربرد مشتق

❖ درس اول : اکسترمم های تابع

❖ درس دوم: بهینه سازی

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

بارم فصل ۵:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور /دی
–	۳/۵	۳

فصل ۵ درس ۱: اکسترمم های تابع

یادآوری:

*از فصل ۴ می دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است.

(کاردرکلاس ص ۱۰۳)

تابع زیر را در نظر بگیرید :

الف) در بازهٔ $(1,7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' .... است.

ب) در بازهٔ $(7,12)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f .... است؛ بنابراین در این بازه علامت f' .... است.

پ) در بازهٔ $(12,+\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر .... است.

بررسی رفتار تابع به کمک مشتق:

*یکی از کاربرد های مشتق بررسی رفتار تابع است یعنی علاوه بر روش هایی که در فصل ۱ برای رفتار یک تابع (تعیین یکنوایی به عبارتی صعودی و نزولی بودن یک تابع) خواندیم در این فصل می توانیم رفتاریک تابع را از طریق مشتق گیری بررسی کنیم

*وقتی تابع مشتق پذیر است از طریق علامت مشتق می توانیم صعودی یا نزولی بودن تابع را مشخص کنیم.

آزمون یکنوایی تابع:

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود ومنفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است

پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود وصفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است

مراحل تعیین رفتار تابع در توابع پیوسته:

۱) از تابع مشتق می گیریم

۲) مشتق را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه ها را می یابیم

۳) تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم.

در بازه هایی که مشتق + باشد یعنی تابع اکیدا صعودی است.

در بازه هایی که مشتق − باشد یعنی تابع اکیدا نزولی است.

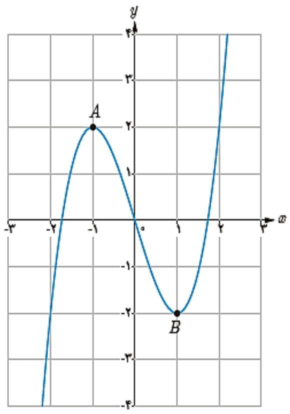
(مثال ص ۱۰۴)

الف)تابع $f(x)=x^3-3x$ در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه ها اکیداً نزولی است؟

☑حل:

در اینجا ازدو روش رفتار این تابع را بررسی می کنیم روش اول از طریق نمودار تابع است که در فصل یک آموختیم .البته رسم نمودار تابع های درجه سوم در حالت کلی در زمره اهداف کتاب حاضر نیست.

روش اول: نمودار تابع



اکیداً صعودی	$(-\infty,-1]$
اکیداً نزولی	$[-1,1]$
اکیداً صعودی	$[1,+\infty)$

مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

روش دوم: مشتق تابع

۱) از تابع مشتق می گیریم:

$$f(x)=x^3-3x \to f'(x)=3x^2-3$$

۲) مشتق را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه ها را می یابیم

$$f'(x)=0 \to 3x^2-3=0 \to \begin{cases} x=+1 \\ x=-1 \end{cases}$$

۳) تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم.

در سطر سوم جدول مقدار تابع را به ازای ریشه ها به دست می آوریم

$$y=x^3-3x \xrightarrow[x=-1]{x=+1} \begin{cases} y=-2 \\ y=+2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$
		اکیدا صعودی		اکیدا نزولی		اکیدا صعودی	

(تمرین ۱و۲ص ۱۱۲)

① بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^3-12x+4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

☑حل:

$f(x)=x^3-12x+4 \qquad f'(x)=3x^2-12<0 \Rightarrow x^2<4$

$\Rightarrow -2<x<2 \Rightarrow x\in(-2,2)$

مشتق در این بازه منفی است. بنابراین، بزرگ ترین بازه ای که تابع در آن اکیداً نزولی است، عبارت است از $[-2,2]$

② با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

☑حل:

$$g(x)=\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow g'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}, \; g'(x)=0 \Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	0	↗	1	↘	0

تابع در بازه $[-\infty,0]$ اکیدا صعودی و در بازه $[0,+\infty)$ اکیدا نزولی است.

نقاط بحرانی تابع:

***نقطه بحرانی:** نقطه درون دامنه تابع که مشتق صفراست یا مشتق ندارد.

***شناسایی نقاط بحرانی از روی شکل:**

الف) مشتق صفر است

ب) مشتق ندارد

*در یک تابع ثابت ،تمام نقاط بحرانی اند زیرا در تمام نقاط مشتق صفر است.

(تمرین ۷ص ۱۱۲)

⑦ نمودار تابعی مانند f با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید به طوری که هر نقطهٔ دلخواه از D_f، یک نقطهٔ بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟

مای درس گروه آموزشی عصر www.my-dars.ir

***شناسایی نقاط بحرانی از روی ضابطه:**

*ابتدا مشتق تابع را پیدا می کنیم و برابر صفر قرار می دهیم

*اگر تابع روی بازه تعریف شود ابتدا و انتهای بازه بحرانی هستند

(تمرین ۳ص ۱۱۲)

③نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$

☑حل:

$$f(x)=\sqrt{۴-x^۲}\rightarrow f'(x)=\frac{-\cancel{۲}x}{\cancel{۲}\sqrt{۴-x^۲}}=\frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\rightarrow\frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}=۰\rightarrow x=۰$$

دامنه تابع $\left[-۲,۲\right]$ می باشد پس نقاط به طول $۰,۲,-۲$ نقاط بحرانی تابع هستند

ب) $g(x)=x^۳+۳x^۲-۴$

پ) $h(x)=\sqrt[۳]{x}$

اکسترمم تابع:

***اکسترمم:** یعنی مینیمم یا ماکزیمم تابع

***انواع اکسترمم:**

الف) اکسترمم نسبی (ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی)

ب) اکسترمم مطلق(ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق)

اکسترمم نسبی تابع:

*** ماکزیمم نسبی :**وقتی مقدار تابع(عرض نقطه) از مقادیر نقاط همسایگی اش بیشتر یا مساوی باشد می گوییم تابع در آن نقطه ماکزیمم نسبی دارد

*** مینیمم نسبی:**وقتی مقدار تابع(عرض نقطه) از مقادیر نقاط همسایگی اش کمتر یا مساوی باشدمی گوییم تابع در آن نقطه مینیمم نسبی دارد

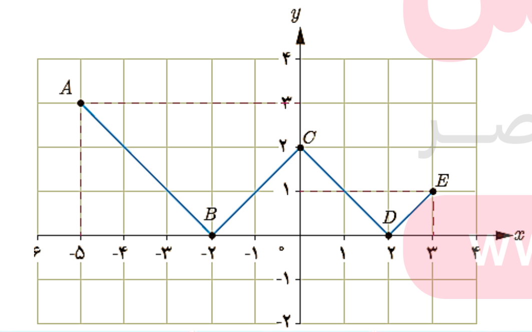
تشخیص اکسترمم نسبی از روی نمودار:

در نمودار روی‌نقطه مورد نظر یک خط افقی کوچک رسم کنید اگر نمودار تابع اطراف این نقطه، پایین یا روی خط افقی بیفتند این نقطه را ماکزیمم نسبی می گوییم. اگر نمودار تابع اطراف این نقطه، بالا یا روی خط افقی بیفتند این نقطه را مینیمم نسبی می گوییم.

(کاردرکلاس ص ۱۰۵)

نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.

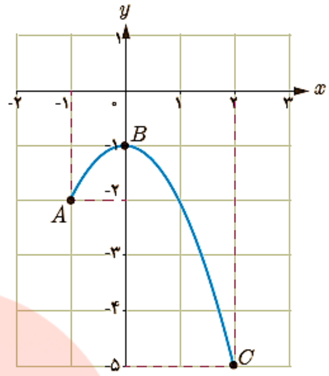
الف) $f(x)=\left|\left|x\right|-۲\right|\ ,\ x\in[-۵,۳]$



نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	–	–
B	min نسبی	۰	$f'(-۲)$ موجود نیست
C	...	۲	...
D	...	...	...
E	...	–	–

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

ب) $g(x) = -x^{2} - 1 \;,\; x \in [-1, 2]$



نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترمم نسبی نیست	−	−
B	max نسبی	...	$f'(0)$ برابر صفر است
C	...	−	−

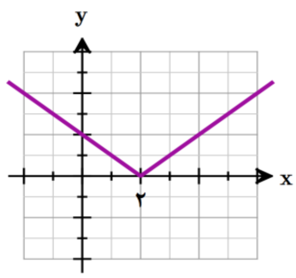
تذکر:

※هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

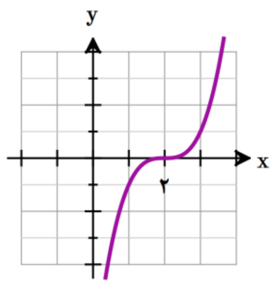
※ هر نقطه بحرانی ممکن است نقطه اکسترمم نسبی باشد یا نباشد

مثال:

در شکل ۱ نقطه به طول $x = 2$ هم بحرانی است هم اکسترمم نسبی ولی در شکل ۲ نقطه به طول $x = 2$ بحرانی است اما اکسترمم نیست



(۱)



(۲)

※تابع فقط در نقاط زیر اکسترمم نسبی دارد :

۱) مقدار مشتق صفر باشد($f'(a) = 0$)

۲) مشتق موجود نباشد

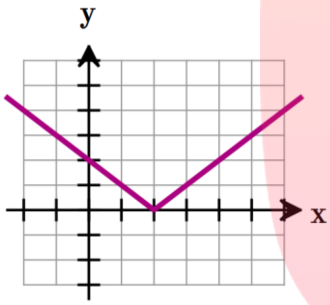
※بنابراین:

اگر تابع f در نقطه به طول اکسترمم نسبی داشته باشدو $f'(a)$ موجود باشد،آنگاه $f'(a) = 0$ ۱

(کاردرکلاس ص ۱۰۷)

① الف) با رسم نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ ، نشان دهید که f در $x = 2$ مینیمم نسبی دارد.

☑حل:



ب) آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟

☑حل:

با توجه به شکل $f'(2)$ موجود نیست چون مشتق چپ و راست برابر نیست

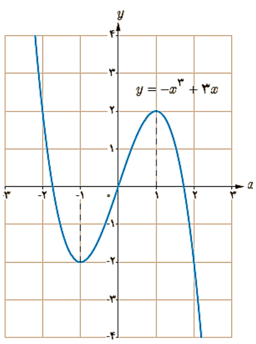
پ) آیا $x = 2$ طول نقطهٔ بحرانی تابع است؟ چرا؟

☑حل:

بله. زیرا تابع در $x = 2$ مشتق ناپذیر است

② نمودار تابع $f(x) = -x^{3} + 3x$ را رسم کرده‌ایم.

الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$، یعنی طول‌های نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید.

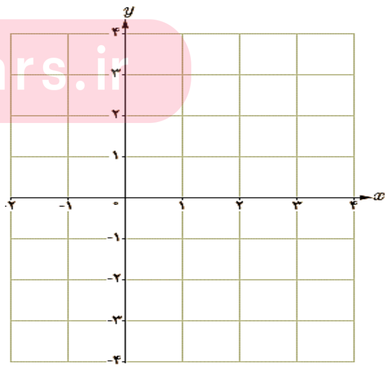
پ) با توجه به الف و ب، درستی قضیه قبل را در مورد این تابع بررسی کنید.

③ تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^2+2x+2$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق‌پذیراست.

الف) $f'(x)$ را بدست آورید.

ب) ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به‌دست آید.

پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطهٔ اکسترمم f منطبق بر نقطهٔ بحرانی آن است؟



آزمون مشتق اول در تعیین اکسترمم نسبی:

۱) در توابعی که مشتق دارند مشتق را مساوی صفر قرار دهیم وریشه ها را می یابیم

۲) مشتق را تعیین علامت می کنیم

۳) با توجه به تغییر علامت مشتق طول نقاط اکسترمم نسبی را مشخص می کنیم

*اگر مشتق تغییر علامت دهدطول نقطه ریشه ساده مشتق است :

الف) اگر علامت مشتق از + به − تغییر کند ماکزیمم نسبی است

$$+ \nearrow \searrow -$$
$$Max$$

ب) اگر علامت مشتق از − به +تغییر کند مینیمم نسبی است

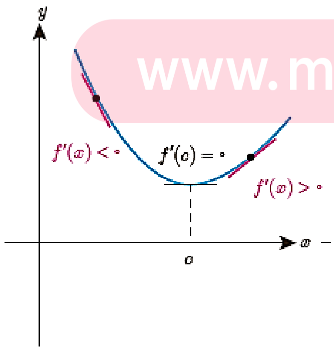
$$- \searrow \nearrow +$$
$$Min$$

*اگر مشتق تغییر علامت ندهد طول نقطه ریشه مضاعف مشتق است و علامت مشتق همواره + یا همواره − است بنابراین اکسترمم نسبی نداریم.

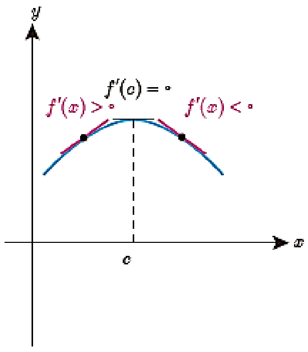
$+ \nearrow + \nearrow \qquad - \searrow - \searrow$

۴) برای رسم نمودار بعد از مشخص کردن اکسترمم تابع، نقاط کمکی را می یابیم و نمودار را رسم می کنیم

مثال:

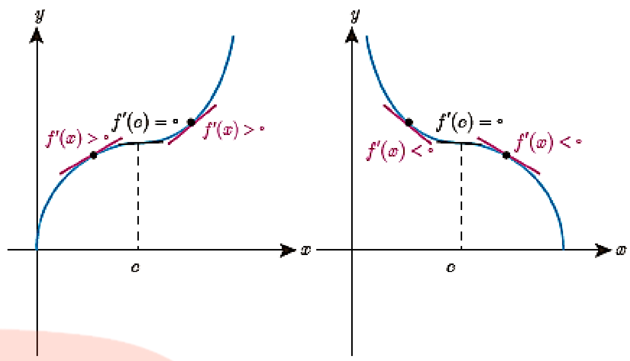


طول مینیمم نسبی : $x=c$



طول ماکزیمم نسبی : $x=c$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir



$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

(کاردرکلاس ۱ و ۲ ص ۱۰۸)

در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید و سپس جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$1)\, f(x) = -x^2 - 2x$

☑حل:

۱) مشتق را مساوی صفر قرار می دهیم وریشه ها را می یابیم

$f(x) = -x^2 - 2x \rightarrow f'(x) = -2x - 2$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x=-1}$ طول نقطهٔ بحرانی

۲) مشتق را تعیین علامت می کنیم

در سطر سوم جدول مقدار تابع را به ازای ریشه ها به دست می آوریم $y = -x^2 - 2x \xrightarrow[x=-1]{} y = +1$

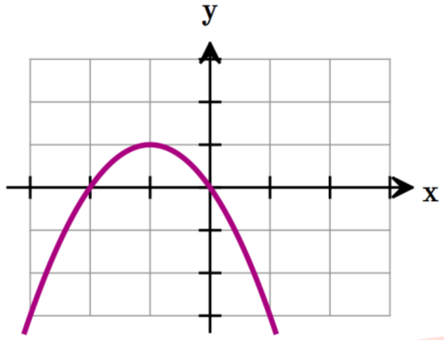
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Max نسبی

۳) ماکزیمم نسبی $\boxed{-1,1}$

۴) نقاط کمکی و رسم نمودار تابع

$$y = -x^2 - 2x \xrightarrow[x=-2]{x=0} \begin{cases} y = 0 \rightarrow (0,0) \\ y = 0 \rightarrow (-2,0) \end{cases}$$



$2)\, f(x) = x^3 - 3x^2$

(تمرین ۴ ص ۱۱۲)

④ در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید و سپس جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

☑حل:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -3 \end{cases}$ (نقاط بحرانی تابع)

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

max نسبی — min نسبی

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

ب) $g(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹$

پ) $h(x) = -x^۳ - ۳x + ۲$

☑حل:

$h(x) = -x^۳ - ۳x + ۲ \Rightarrow y'(x) = -۳x^۲ - ۳ < ۰ \Rightarrow$

تابع همواره نزولی اکید است و بنابراین فاقد ماکزیمم و مینیمم نسبی است.

(تمرین ۶ ص ۱۱۲)

اگر نقطهٔ $(۲,۱)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، مقادیر b و d را به‌دست آورید.

☑حل:

$f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$

$(۲,۱) \in f \Rightarrow f(۲) = ۱ \Rightarrow ۸ + ۴b + d = ۱ \Rightarrow ۴b + d = -۷$

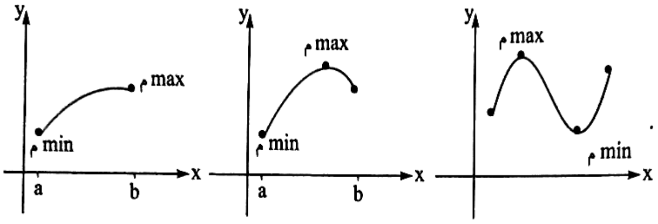
$f'(x) = ۳x^۲ + ۲bx \xRightarrow{f'(۲)=۰} ۱۲ + ۴b = ۰ \Rightarrow b = -۳ \Rightarrow d = ۵$

اکسترمم مطلق تابع:

＊ **ماکزیمم مطلق:** وقتی مقدار تابع(عرض نقطه) از تمامی مقادیر نقاط دیگر بیشتر یا مساوی باشد می گوییم تابع در آن نقطه ماکزیمم مطلق دارد

＊ **مینیمم مطلق:** وقتی مقدار تابع(عرض نقطه) از تمامی مقادیر نقاط دیگر کمتر یا مساوی باشد می گوییم تابع در آن نقطه مینیمم مطلق دارد

مثال:



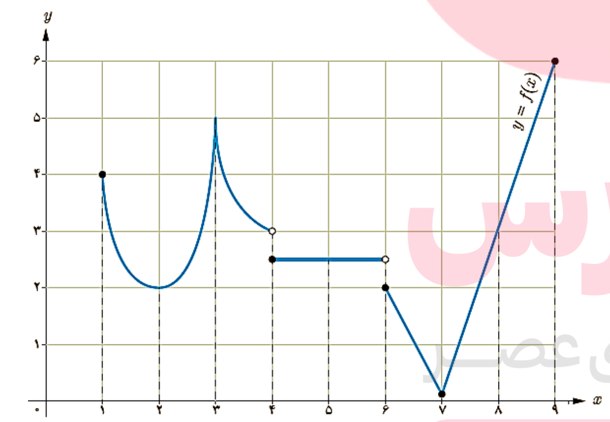
تفاوت و روابط اکسترمم نسبی و مطلق:

۱برای تشخیص اکسترمم نسبی به نقاط همسایه نگاه می کنیم ولی اکسترمم مطلق به کل نقطه های دامنه نگاه می کنیم.

۲اکسترمم مطلق می تواند در سرو ته بازه باشد ولی اکسترمم نسبی نمی تواند.

(کاردرکلاس ص ۱۱۰)

1 با تکمیل جدول زیر، اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و همچنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.



☑حل:

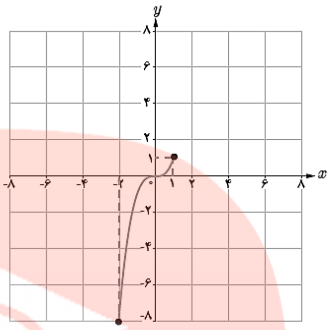
طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
min مطلق	×	×	×	×	×	×	✓	×	×
max نسبی	×	×	✓	×	✓	×	×	×	×
min نسبی	×	✓	×	✓	✓	×	✓	×	×
نقطه بحرانی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓

② به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $t(x)=x^3 \;\; ; \;\; x\in[-2,1]$

☑حل:

ابتدا نمودار را رسم می کنیم:



اکسترمم نسبی ندارد.

مقدار ماکزیمم مطلق ۱

و مقدار مینیمم مطلق ۸- است.

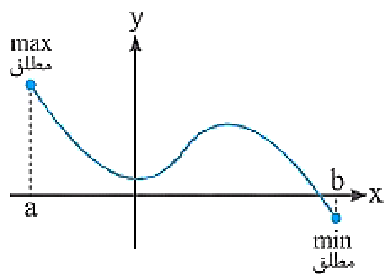
ب) $g(x)=-x^2 \;\; ; \;\; x\in[-2,3]$

پ) $u(x)=\frac{1}{x}$

قضیه:

*اگر تابع در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع دراین بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

مثال:



(فعالیت ص ۱۱۱)

به کمک رسم نمودار تابع $f(x)=\left|x^2-1\right|$ در بازه $(-2,3)$، نقاط اکسترمم مطلق را تعیین کنید.

روش پیدا کردن اکسترمم مطلق:

۱.مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی را می یابیم

۲. مقدار تابع را می یابیم

۳. در عرض بزرگ ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک ترین آنها مقدار مینیمم تابع است

(تمرین ۵ ص ۱۱۲)

⑤ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=-2x^3+9x^2-13 \;\; ; \;\; x\in[-1,2]$

☑حل:

$$f'(x)=-6x^2+18x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0,-1,2 \\ x=3\notin[-1,2] \end{cases}$$

طول نقاط بحرانی تابع عبارت‌اند از صفر، ۱- و ۲.

x	-1	0	2
$f(x)$	-2	-13	7

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق ۷ و مقدار مینیمم مطلق ۱۳- است.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

ب) $g(x) = x^{۳} + ۲x - ۵ \;\; ; \;\; x \in [-۲,۱]$

☑حل:

$g(x) = x^{۳} + ۲x - ۵ \Rightarrow y' = ۳x^{۲} + ۲ \neq ۰ \Rightarrow x = -۲ \,,\, ۱$

x	-۲	۱
$g(x)$	-۱۷	-۲

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق ۲- و مقدار مینیمم مطلق ۱۷- است.

(مثال ص ۱۱۱)

نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = ۲x^{۳} + ۳x^{۲} - ۱۲x$ را در بازه $[-۱,۳]$ تعیین کنید.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل ۵ درس ۲: بهینه سازی

بهینه سازی:

یکی از کاربردهای ریاضی، بهینه سازی است یعنی ایجاد بهترین حالت ممکن بنابراین مسائلی را با هدف ماکزیمم کردن مساحت، حجم،سود یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد

مراحل حل مسائل بهینه سازی:

۱.درصورت نیاز ترسیم شکل برای درک بهتر
۲.نوشتن مسئله به صورت تابع یک متغیره
۳. مشتق تابع را مساوی صفر قرار می دهیم.
۴.یافتن نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه
۵.رسم جدول تغییرات (تعیین علامت) و یافتن اکسترمم مطلق

(مثال۱و۲و۳ و ۴ و ۵ص ۱۱۵ و۱۱۴ و ۱۱۶ و ۱۱۷)

1 نشان دهید در بین تمام مستطیل های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت رادارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند.

2 می خواهیم از گوشه های یک ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ سانتی متر مربع های کوچکی به ضلع x ببریم و بعد از تاکردن گوشه صفحه آن را به شکل یک جعبه در باز در آوریم مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

3 می خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل درباز بسازیم که حجم آن $10m^3$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است .عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟

مای درس
گـــروه آمـــوزشی عصـــر
www.my-dars.ir

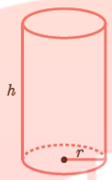
4 غلظت یک داروی شیمیایی در خون t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $c(t)=\frac{۳t}{t^۳+۲۷}$ به دست می آید .چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

5 آرتا درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله آن از نزدیک ترین نقطه ساحل یعنی A معادل ۳ کیلومتر است . او می خواهد به نقطه B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری نقطه A قرار دارد فرض کنید سرعت حرکت قایق $۲km/h$ و سرعت پیاده روی آرتا $۴km/h$ باشد .اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد در چه نقطه ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده روی کند؟

(کاردرکلاس ۱و۲و۳و۴ص ۱۱۸)

1 می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

☑حل:



حجم استوانه $۱(lit)=۱۰۰۰\ cm^۳$

$\Rightarrow \pi r^۲h=۱۰۰۰\ (cm^۲)\Rightarrow h=\frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}$

مساحت کل استوانه : $S=$ مساحت قاعده + سطح جانبی

$S(r)=\pi r^۲+۲\pi rh \Rightarrow S(r)=\pi r^۲+۲\pi r(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲})$

$\Rightarrow S(r)=\pi r^۲+\frac{۲۰۰۰}{r}$

$S'(r)=۲\pi r+\frac{۲۰۰۰}{r^۲}=۰\Rightarrow \pi r^۳=۱۰۰۰$

$\Rightarrow r=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}$

r	۰	$\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}$	$+\infty$
S'	$-$	۰	$+$
S	$+\infty$ ↘	$۳۰\sqrt[۳]{\pi}$	↗ ۰

پس اگر شعاع قاعده و همچنین ارتفاع استوانه هر دو برابر $r=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}\simeq ۶/۸۳\,cm$ گرفته شوند، کمترین مقدار فلز مصرف خواهد شد.

2 هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $۳۲۰v^۲$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

☑حل :

اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم :

هزینه t ساعت حرکت : $C = ۸۰۰۰۰۰t + (۳۲۰v^۲)t$

هزینه x کیلومتر حرکت : $C = ۸۰۰۰۰۰(\frac{x}{v}) + (۳۲۰v^۲)(\frac{x}{v})$

هزینه ۱ کیلومتر حرکت : $C(v) = \frac{۸۰۰۰۰۰}{v} + ۳۲۰v$

$$C'(v) = \frac{۸۰۰۰۰۰}{v^۲} + ۳۲۰ = ۰ \Rightarrow v^۲ = \frac{۱۰۰۰۰}{۴} \Rightarrow v = ۵۰$$

v	۰		۵۰		$+\infty$
C'		$-$	۰	$+$	
C	$+\infty$	$\searrow$	۳۲۰۰۰	$\nearrow$	$+\infty$

بنابراین، اگر قطار با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کند، هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدارممکن خواهد بود.

③ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

☑حل:

$x - y = ۱۰ \Rightarrow y = x - ۱۰$

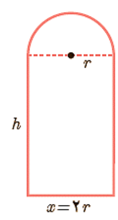
$P = xy = x(x - ۱۰) = x^۲ - ۱۰x \quad p'(x) = ۲x - ۱۰ = ۰$

$x = ۵ \,,\, y = -۵$

④ در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل مستطیل و نیم دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به طوری‌که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

☑حل:

باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.



محیط $= ۴/۵ \Rightarrow ۲h + x + \frac{۱}{۲}(۲\pi r) = \frac{۹}{۲}$

$$\Rightarrow ۲h + ۲r + \pi r = \frac{۹}{۲} \rightarrow h = \frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}$$

مساحت پنجره $S =$ مساحت مستطیل + مساحت نیم دایره

$$S = xh + \frac{۱}{۲}(\pi r^۲) \Rightarrow S(r) = ۲r(\frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}) + \frac{۱}{۲}\pi r^۲$$

$$\Rightarrow S(r) = -(\frac{\pi + ۴}{۲})r^۲ + \frac{۹}{۲}r$$

$$S'(r) = -(\pi + ۴)r + \frac{۹}{۲} = ۰ \Rightarrow r = \frac{۹}{۲(\pi + ۴)}$$

r	۰		$\frac{۹}{۲(\pi+۴)}$		$\frac{۹}{۲(\pi+۲)}$
$S'(r)$		$+$		$-$	
$S(r)$	۰	$\nearrow$	$\frac{۸۱}{۸(\pi+۴)}$	$\searrow$	$\frac{۸۱\pi}{۸(\pi+۲)^۲}$

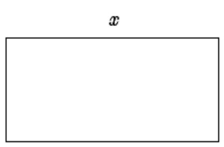
پس اگر $r = \frac{۹}{۲(\pi + ۴)} \simeq ۳۲ / ۱۴ \ cm$ این پنجره بیشترین نوردهی را خواهد داشت.

(تمرین ص ۱۲۰)

① کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

☑حل:



$\frac{۱۰۰۰۰}{x} = y$ (واحد بر حسب میلیون تومان است)

$$C_{(x)} = ۲x \times ۲ + ۲ \times \frac{۱۰۰۰۰}{x} \times ۸ \Rightarrow C_{(x)} = ۴x + \frac{۱۶۰۰۰۰}{x}$$

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوار کشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

مای درس
گروه آموزشی
www.my-dars.ir

☑حل:

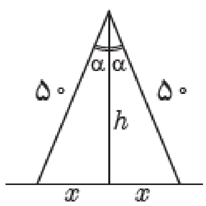
$$C'_{(x)} = ۴ - \frac{۱۶۰۰۰۰}{x^{۲}} = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۴۰۰۰۰ \Rightarrow x = ۲۰۰ \Rightarrow y = \frac{۱۰۰۰۰}{۲۰۰} = ۵۰$$

x	۰		۲۰۰	
$C'(x)$		-		+
$C(x)$		↘	۱۶۰۰	↗

بنابراین اگر طول دیوارهای شمالی و جنوبی ۲۰۰ و عرض آن برابر ۵۰ متر باشد، هزینه دیوارکشی،حداقل مقدار ممکن خواهد بود.

② الف) می خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم به طوری که قاعدهٔ مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

☑حل:



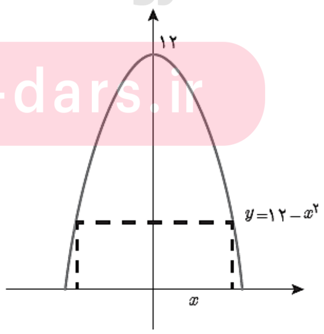
$$h = \sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}}$$

$$S_{(x)} = x\sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}} \Rightarrow S'_{(x)} = \sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}} - \frac{x^{۲}}{\sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}}}$$

$$s'(x) = ۰ \Rightarrow ۲۵۰۰ - x^{۲} = x^{۲}$$

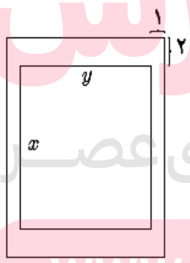
$$x^{۲} = \frac{۲۵۰۰}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵۰}{\sqrt{۲}} \Rightarrow S\left(\frac{۵۰}{\sqrt{۲}}\right) = ۱۲۵۰$$

③ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y = ۱۲ - x^{۲}$ باشند.



④ هر صفحهٔ مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $۳۲cm^{۲}$ خواهد بود . هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم ایت حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه $۲cm$ و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

☑حل:



$$xy = ۳۲$$

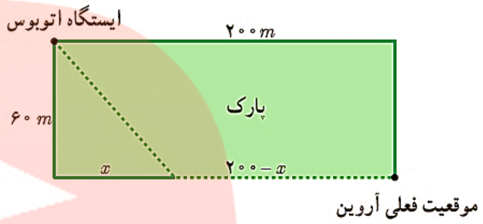
$$S = (y+۲)(x+۴) = \left(\frac{۳۲}{x} + ۲\right)(x+۴) = ۴۰ + \frac{۱۲۸}{x} + ۲x$$

$$S'_{(x)} = -\frac{۱۲۸}{x^{۲}} + ۲ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۶۴ \Rightarrow x = ۸ \quad و \quad y = ۴$$

ابعاد صفحه: $\Rightarrow \begin{cases} x+۴ = ۱۲ \\ y+۲ = ۶ \end{cases}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

⑤آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می تواند از درون پارک و تنها با سرعت $۲m / s$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



☑حل:

$$t(x)=\frac{۲۰۰-x}{۳}+\frac{\sqrt{۳۶۰۰+x^{۲}}}{۲}$$

$$t'(x)=-\frac{۱}{۳}+\frac{x}{۲\sqrt{۳۶۰۰+x^{۲}}}=۰$$

$$\Rightarrow ۳x=۲\sqrt{۳۶۰۰+x^{۲}} \Rightarrow x=۲۴\sqrt{۵}\simeq ۵۳/۶۷$$

x	۰		$۲۴\sqrt{۵}$		۲۰۰
$t'(x)$		−		+	
$t(x)$	$۹۶\frac{۲}{۳}$	↘	$\frac{۲۰۰}{۳}+۱۰\sqrt{۵}$	↗	$\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۳۶۰۰}\simeq ۱۰۴/۴$

اگر $x = ۲۴\sqrt{۵} \simeq ۵۳ / ۶۷$ باشد.آروین در کمترین زمان ممکن به ایستگاه خواهد رسید.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل ششم

هندسه

❖ درس اول : تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

❖ درس دوم: دایره

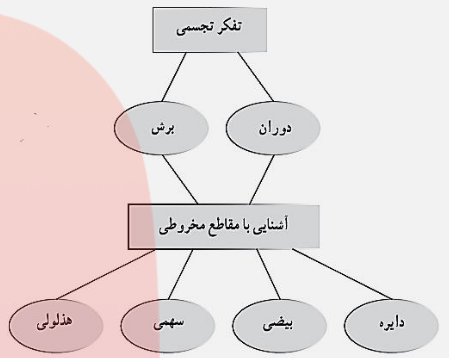
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

بارم فصل٦:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور/دی
–	۳/۵	۲/۵

فصل ٦ درس ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

تفکر تجسمی:



*تفکر تجسمی یعنی فکر کردن با شکل ها و تصاویر

*تفکر تجسمی مفهوم وسیعی دارد که در این درس تنها به دو مؤلفه برش و دوران خواهیم پرداخت.

تجسم شکل حاصل از دوران اشکال هندسی حول یک محور:

*در اینجا شکل ها را حول یک خط دوران می دهیم که محور دوران نامیده می شود

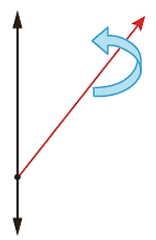
*شکل حاصل از دوران خط ، پاره خط یا نیم خط شکلی دوبعدی (دارای طول و عرض)با حجمی توخالی است

*شکل حاصل از دوران شکل های دو بعدی شکلی سه بعدی(دارای طول و عرض و ارتفاع) و توپر است

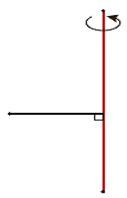
(فعالیت ص ۱۲۳ و کاردر کلاس ص ۱۲۵)

شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید.

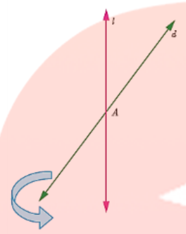
الف) شکل حاصل از دوران نیم خط حول محور؟



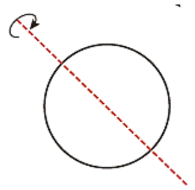
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن عموداست؟



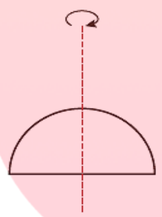
پ) شکل حاصل از دوران خط حول محور؟



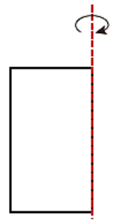
ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی ازقطرهای آن ؟



ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن؟



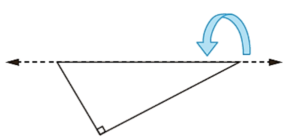
ج) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن ؟



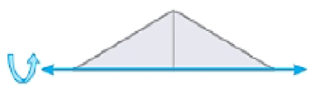
چ)شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه؟

ح) شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه حول محور ؟

خ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر؟

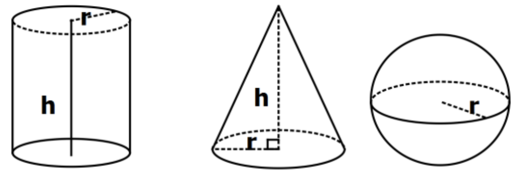


د) شکل حاصل از دوران یک لوزی حول قطر؟



www.my-dars.ir

حجم اشکال هندسی مهم:



استوانه	مخروط	کره
$V=\pi r^2 h$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

(تمرین ۳ص ۱۳۲)

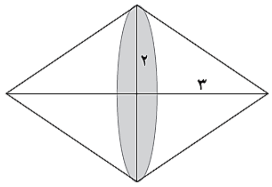
③گر یک لوزی به طول قطرهای ۶ و ۴حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

☑حل:

شکل حاصل، دو مخروط هم اندازه با قاعده مشترک است .

$$\text{حجم شکل} = 2\times(\text{حجم یک مخروط})$$

$$=2\times\frac{1}{3}\pi(2)^2\times 3=8\pi$$



برش و سطح مقطع:

*چیزی که باعث برش می شود یک صفحه است مثل چاقو

* **سطح مقطع**: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود.مثل شکل حاصل از برخورد چاقو با هندوانه

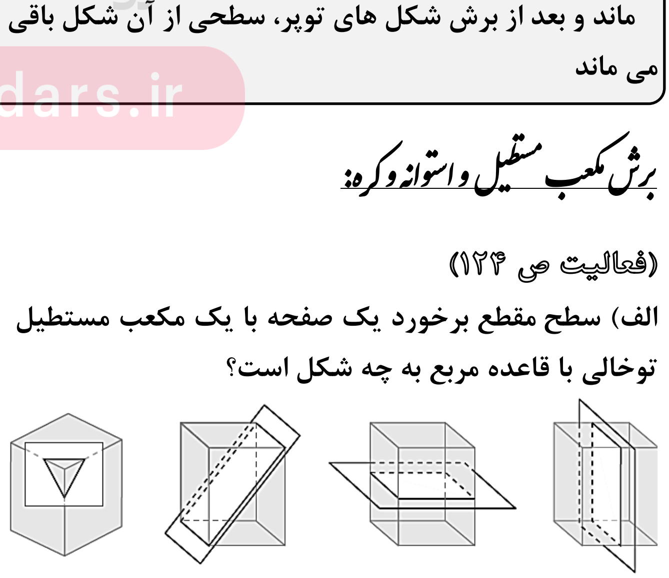
*سطح مقطع معمولا نقطه، خط، دایره، مربع، بیضی و ... است.

*بعد ازبرش شکل های توخالی ، محیطی از آن شکل باقی می ماند و بعد از برش شکل های توپر، سطحی از آن شکل باقی می ماند

برش مکعب مستطیل و استوانه و کره:

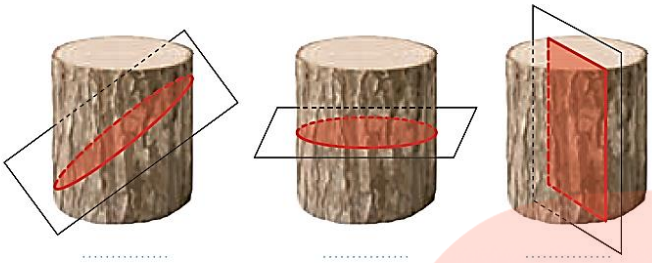
(فعالیت ص ۱۲۴)

الف) سطح مقطع برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعده مربع به چه شکل است؟



....

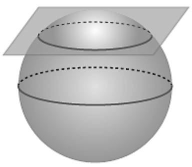
ب) سطح مقطع استوانه با صفحه های عمودی، افقی و صفحه مایلی که با قاعده های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟



....

پ) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟

در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

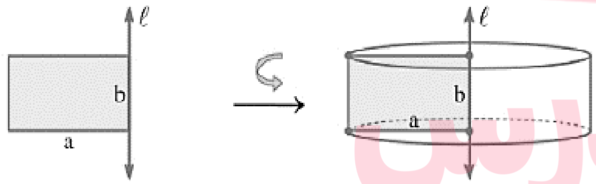


(کاردرکلاس ۲ ص ۱۲۵)

②مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.

الف) شکل حاصل را رسم کنید.

☑حل:



ب) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

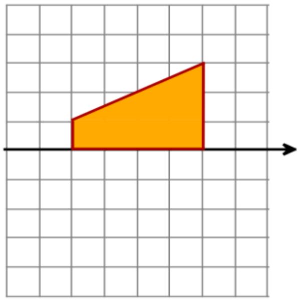
پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳ و۴باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحهٔ موازی با قاعدهٔ این استوانه چقدر است؟

ت) در حالت پ، اگر صفحه ای عمود بر قاعدهٔ استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟

گروه آموزشی ما درس www.my-dars.ir

(تمرین ص ۱۳۲)

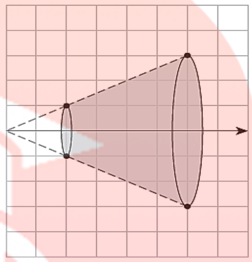
① در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.



الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

☑حل:

پاره خط داده شده را حول محور دوران می دهیم .شکل حاصل بدین شکل خواهد بود:



با ادامه دادن پاره خط داده شده مشخص می شود که شکل حاصل بخشی از یک مخروط است (مخروط ناقص)لذا حجم مخروط ناقص عبارت است از:

حجم مخروط کامل - حجم مخروط رنگ نشده

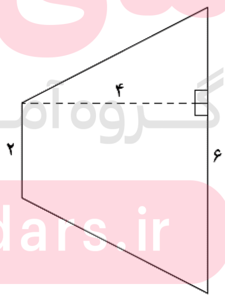
$$=\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲\times ۶-\frac{۱}{۳}\pi(۱)^۲\times ۲$$

$$=۱۸\pi-\frac{۲}{۳}\pi=\frac{۵۲}{۳}\pi$$

ب) سطح مقطع این شکل دربرخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است ؟

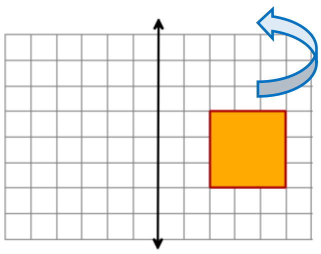
☑حل:

صفحه ای که شامل محور دوران باشد ، جسم را به دو نیمه مساوی تقسیم می کند و سطح مقطع به شکل ذوزنقه خواهد بود.



$$\text{مساحت ذوزنقه : }\frac{(۲+۶)\times ۴}{۲}=۱۶cm^۲$$

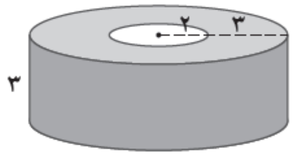
②مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصلهٔ ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.



الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

☑حل:

مربع را حول محور دوران می دهیم.شکل حاصل بدین شکل است .



حجم = حجم استوانه بزرگ تر - حجم استوانه کوچک تر

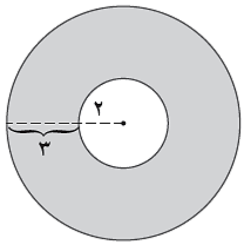
$$=\pi(۵)^۲\times ۳-\pi(۲)^۲\times ۳$$

$$=۷۵\pi-۱۲\pi=۶۳\pi$$

ب)سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.

☑حل:

سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه ای موازی با قاعده استوانه یک دایره است .لذا در این شکل سطح مقطع به این شکل است:

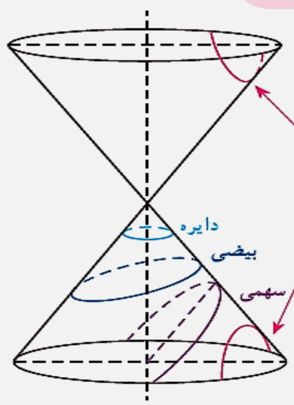


آشنایی با مقاطع مخروطی:

***سطح مخروطی** :شکل حاصل از دوران خط حول محور را سطح مخروطی گوییم.

***مقاطع مخروطی** : اگرسطح مخروطی را با یک صفحه برش دهیم سطح مقطع حاصل را مقطع مخروطی گوییم.

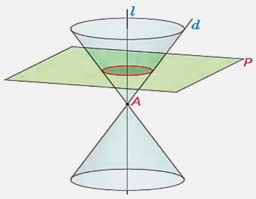
***انواع مقاطع مخروطی** : دایره، بیضی، سهمی و هذلولی.



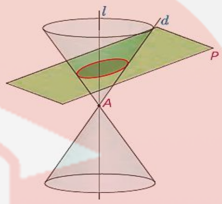
مای درس
گروه آموزشی عصب
www.my-dars.ir

طریقه ایجاد مقاطع مخروطی:

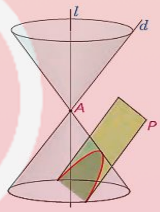
الف) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد واز رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.



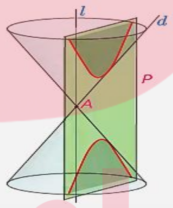
ب) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود نباشد ودر هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و ازرأس نگذرد،شکل حاصل بیضی خواهد بود.



پ) اگر صفحه در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل سهمی است.



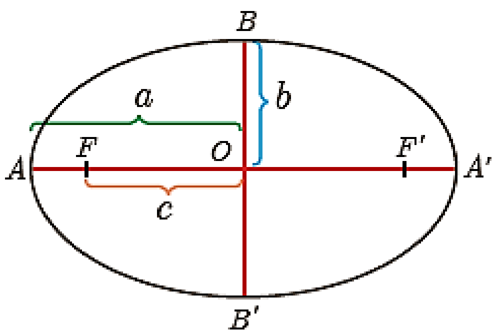
ت) اگر صفحه سطح مخروطی را، هم درقسمت بالایی و هم در قسمت پایینی رأس آن عبور نکند،شکل حاصل را هذلولی می نامیم.



بیضی:

*بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت است.

کالبدشکافی بیضی:



*کانون ها: F, F'

*فاصله کانونی: $FF' = ۲c$

*مرکز بیضی: O

*قطر بزرگ یا قطر کانونی: $AA' = ۲a$

*قطر کوچک: BB'

*اگر:

نصف قطر بزرگ (a) و نصف قطر کوچک (b) و نصف فاصله کانونی (c) آنگاه داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲$

(مثال وکاردرکلاس ص ۱۳۰)

اگر در یک بیضی داشته باشیم $a = ۴$ و $c = ۳$، در این‌صورت اندازۀ قطر کوچک را محاسبه کنید.

☑حل:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \to b^۲ = ۴^۲ - ۳^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷$$

$$\to b = \sqrt{۷} \quad , \quad \boxed{۲b = ۲\sqrt{۷}}$$

①اگر در یک بیضی داشته باشیم $a = ۵$ و $b = ۳$، در این‌صورت اندازۀ فاصلۀ کانونی را محاسبه کنید.

بیضی افقی:

*اگر قطر بزرگ افقی باشد، آن بیضی را بیضی افقی می نامیم

*مختصات نقاط مهم در بیضی افقی: $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$

$A\left|\begin{matrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\right.$ $\quad A'\left|\begin{matrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\right.$

$B\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix}\right.$ $\quad B'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}\right.$

$F\left|\begin{matrix}\alpha+c\\ \beta\end{matrix}\right.$ $\quad F'\left|\begin{matrix}\alpha-c\\ \beta\end{matrix}\right.$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

بیضی قائم:

*اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی را بیضی قائم می نامیم.

*مختصات نقاط مهم در بیضی قائم: $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$

$A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+a\end{matrix}\right.$ $\qquad A'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-a\end{matrix}\right.$

$B\left|\begin{matrix}\alpha+b\\ \beta\end{matrix}\right.$ $\qquad B'\left|\begin{matrix}\alpha-b\\ \beta\end{matrix}\right.$

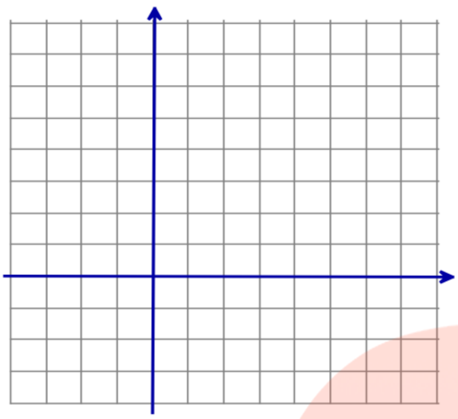
$F\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+c\end{matrix}\right.$ $\qquad F'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-c\end{matrix}\right.$

(کاردرکلاس ۲ص ۱۳۰)

2 در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(۴,۵)$ باشد :

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

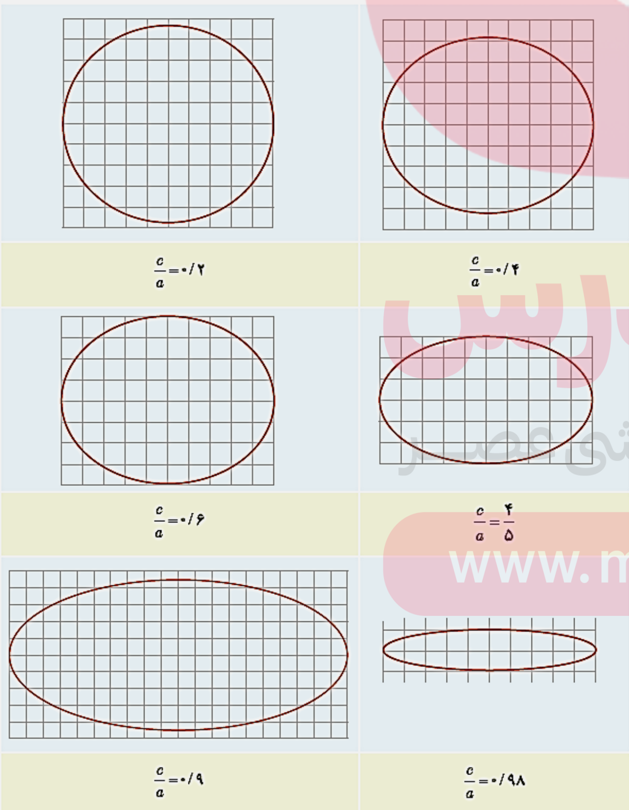
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.



خروج از مرکز بیضی:

*مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می دهند. $(۰ < e < ۱)$

* خروج از مرکز بیضی چاقی و لاغری بیضی را نشان می دهد. هر چه مقدار e کمتر باشد بیضی چاقتر و به دایره شبیه تر است.



(مثال)

اگر در یک بیضی اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد و قطر بزرگ ۸ واحد باشد خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

ما درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

☑حل:

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \to c^{۲} = ۴^{۲} - ۳^{۲} = ۱۶ - ۹ = ۷$$

$$\to c = \sqrt{۷} \quad , \quad \boxed{e = \frac{\sqrt{۷}}{۴}}$$

(تمرین ۵ و ۴ص ۱۳۲)

④کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است.

الف) فاصلهٔ کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادلهٔ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = ۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

⑤ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$ ، مرکز آن $(-۴,-۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

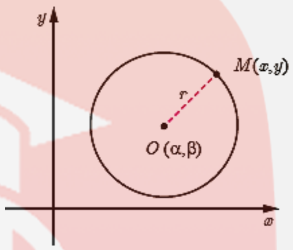
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل ۶ درس ۲: دایره

دایره:

*مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از نقطه ثابتی در همان صفحه، مقداری ثابت و مثبت باشد.

*این نقطه ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را اندازهٔ شعاع دایره می نامیم. $C\left(O,r\right)$



معادله استاندارد دایره:

*اگر مرکز $O\left(\alpha,\beta\right)$ و شعاع r باشد داریم:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

*اگر مرکز دایره روی مبدا مختصات باشد $O\left(0,0\right)$ داریم:

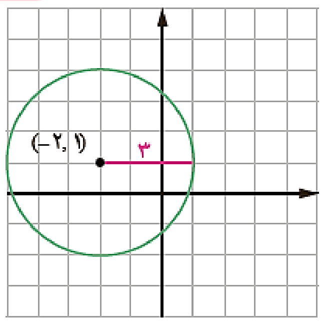
$$x^2+y^2=r^2$$

(مثال ص ۱۳۵)

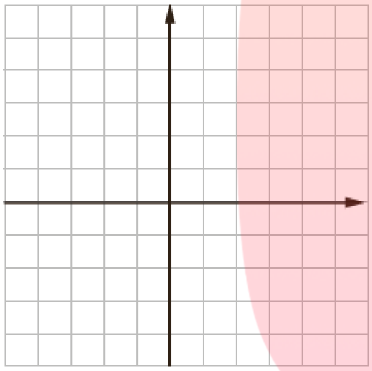
الف) اگر مرکز دایره $(-2,1)$ و اندازهٔ شعاع دایره ۳ باشد. معادلهٔ استاندارد دایره را بنویسید. و شکل دایره را رسم کنید

☑حل:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9$$



ب) اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ باشد. مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید. و شکل دایره را رسم کنید



(تمرین ۲ ص ۱۴۲)

②در حالت‌های زیر معادلهٔ دایره را بنویسید :

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2,-1)$ باشد.

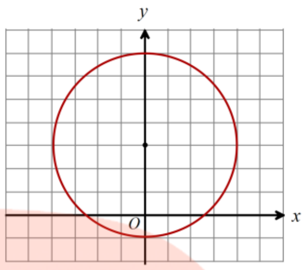
ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2,3)$ و نقطهٔ $(-3,-9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

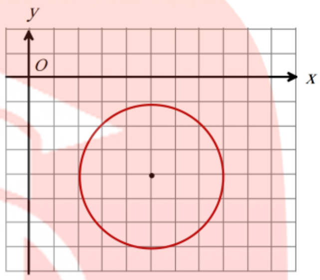
پ) دایره‌ای که نقاط $(0,3)$ و $(-4,-1)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

(کاردکلاس ۴ص ۱۳۶)

④ معادلهٔ دایره‌های زیر را بنویسید.





معادله گسترده یا ضمنی دایره:

※اگر معادله استاندارد را به کمک اتحادهای جبری ساده کنیم معادله گسترده به دست می آید.

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

مثال:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=1$$
$$x^2+y^2-4x+6y+12=0$$

※مختصات مرکز: $O\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$

※شعاع دایره: $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

(کاردکلاس ص ۱۳۷)

معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادلهٔ دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

(تمرین ۵ص ۱۴۲)

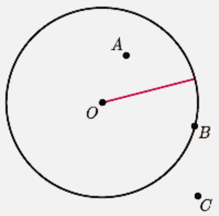
⑤ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن را پیدا کنید و معادلهٔ آن را به شکل استاندارد بنویسید.

وضعیت نقطه و دایره:

※اگر نقطه روی دایره باشد: $OB=r$

※اگر نقطه درون دایره باشد: $OA<r$

※اگر نقطه بیرون دایره باشد: $OC>r$



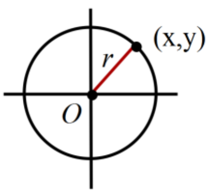
(کاردکلاس۱ و۲ص ۱۳۶)

① در حالت‌های زیر، معادلهٔ دایره را بنویسید :

الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲.

ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r.

پ) دایره‌ای که از نقطهٔ $(1,-3)$بگذرد و مرکز آن $(2,-1)$ باشد.



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

② با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید.

معادله دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط $A(۱,۱)$	نقاط $B(۰,۳)$	نقاط $C(-۲,۴)$
$(x+۲)^۲+(y-۳)^۲=۴$	....	....	....	....
....	دایره به مرکز $(۲,-۱)$ و شعاع ۳	....	بیرون دایره	....

(تمرین ۳ ص ۱۴۲)

③ وضعیت نقاط $(۱,۰)$، $(-۱,۰)$، $(۰,-۱)$، $(-۲,-۱)$ و $(۰,۰)$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ مشخص کنید.

(تمرین۱ص ۱۴۲)

①در هریک از معادله های زیر مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید. مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید. شکل این دایره را رسم کنید

الف) $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۱=۰$

☑حل:

$$x^۲+y^۲-۶x+۲y+۱=۰ \Rightarrow a=-۶\ ,\ b=۲\ ,\ c=۱$$

$\Rightarrow$ مرکزدایره: $(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۳,-۱)\ ,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

$$\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+۲^۲-۴(۱)}=۳$$

محل تقاطع با محور x ها:

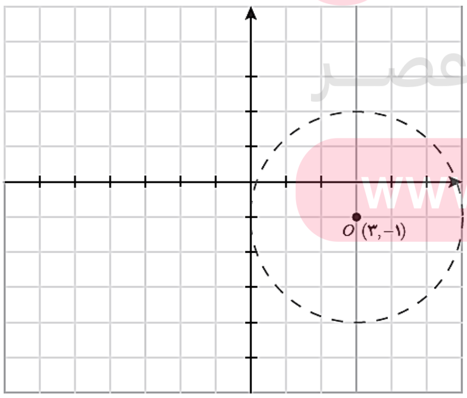
$$y=۰ \Rightarrow x^۲-۶x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=(-۶)^۲-۴(۱)(۱)=۳۲$$

$$\Rightarrow x=\frac{+۶\mp\sqrt{۳۲}}{۲}=\frac{۶\mp۴\sqrt{۲}}{۲}\begin{cases}۵/۸ \rightarrow (۵/۸,۰)\\ ۰/۱۷ \rightarrow (۰/۱۷,۰)\end{cases}$$

محل تقاطع با محور y ها:

$$x=۰ \rightarrow y^۲+۲y+۱=۰ \Rightarrow (y+۱)^۲=۰ \Rightarrow y=-۱ \rightarrow (۰,-۱)$$

رسم دایره:

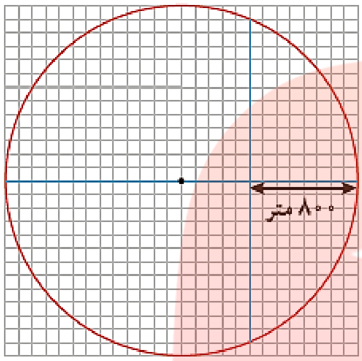


ب) $x^۲+(y+۳)^۲-۴=۰$

پ) $(x+1)^2 + y^2 = 4$

(تمرین۴ص ۱۴۲)

۴- شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر دو مسیر پیاده روی مطابق شکل بسازد. اگرمختصات مرکز دایره (۱۳,۱۳) و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد:



الف) معادلهٔ این دایره چیست؟

☑حل:

$$(x-13)^2+(y-13)^2=169$$

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

☑حل:

ب) اگر مختصات نقاط برخورد مسیرها را با دایره A، A'، B و B' بنامیم مطابق شکل داریم: $A'(26,13)$ و $A(0,13)$
معادله خط گذرنده از نقاط B و B' برابر است با $x=18$. با جایگزین کردن این مقدار در معادلهٔ دایره داریم:

$$(18-13)^2+(y-13)^2=169 \Rightarrow (y-13)^2=$$

$$169-25=144 \Rightarrow y-13=\mp 12 \Rightarrow \begin{cases} y=25 \\ y=1 \end{cases}$$

پس مختصات B و B' به ترتیب عبارت‌اند از: (۱۸,۲۵) و (۱۸,۱)

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

☑حل:

در نقطه (۱۸,۱۳)

ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

☑حل:

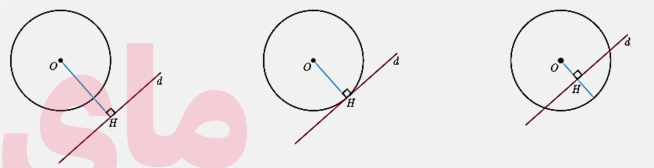
شعاع دایره برابر ۱۳ و فاصله مرکز دایره از محل تقاطع دو مسیر ۵ واحد است. از رابطه فیثاغورس اندازه فاصله نقطه B از محل تقاطع ۱۲ واحد است و طول مسیر BB' بدین ترتیب ۲۴۰۰ متر است.

وضعیت خط و دایره:

*اگر خط بردایره مماس باشد: $OH = r$

*اگر خط با دایره متقاطع باشد: $OH < r$

*اگر خط دایره را قطع نکند: $OH > r$



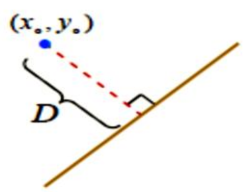
یادآوری:

*خط مماس در نقطه تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

*فاصله نقطه از خط:

ابتدا خط را به صورت $ax+by+c=0$ مرتب می کنیم سپس فاصله را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$D=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



(مثال ص ۱۳۸ وکاردرکلاس اص ۱۳۹ و تمرین ۶ ص ۱۴۲)

وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $6x+4y=0\ ,\ x^2+y^2-4x-4y+7=0$

☑حل:

*کافی است مختصات مرکز دایره را مشخص کرده و سپس فاصله مرکز دایره‌را از خط داده شده محاسبه کنیم و اندازه آن را با اندازه شعاع دایره مقایسه کنیم.

*مختصات مرکز: $O\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)=(2,2)$

*فاصله نقطه از خط:

$$d=\frac{|6(2)+4(2)+0|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{20}{\sqrt{52}}=\frac{10}{\sqrt{13}}$$

*شعاع دایره:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4(7)}=1$$

* بنابراین $d>r$ خط داده شده بیرون دایره است و با آن نقطه تقاطعی ندارد.

ب) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و $y=-1$.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

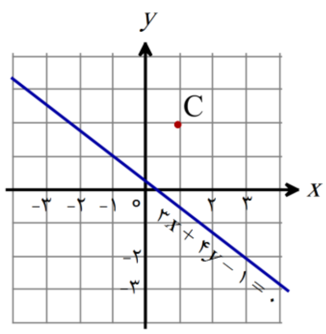
پ) $x^2+y^2-2x-3=0$ و $x+y=3$.

ت) $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ و $x+y=1$.

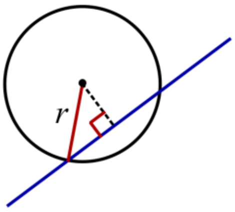
ث) $x^2+y^2=2$, $y=-x-2$

(کاردرکلاس۲و۳ ص ۱۳۹)

2) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1,2)$ باشد.

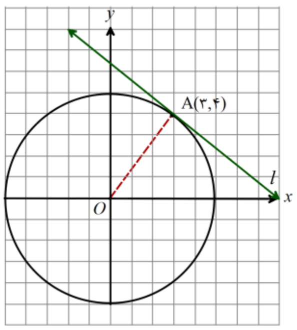


3) مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.



(تمرین ۷و۸ص ۱۴۲)

7) اگر بدانیم خط l در نقطه $(3,4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادلهٔ خط مماس چیست؟

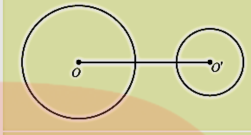
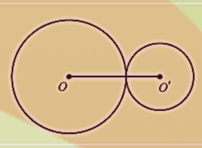
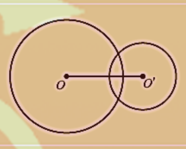


8) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطهٔ $(0,3)$ و بر خط $3x-4y=3$ مماس باشد.

مای درس
گروه آموزشی
www.my-dars.ir

وضعیت دو دایره:

*پاره خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می کند، خط المرکزین(d) نامیده می شود.

دو دایره بیرون هم (متخارج)	$d>r+r'$	
دو دایره مماس بیرون	$d=r+r'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$r-r'<d<r+r'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d=r-r'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d<r-r'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d=0$	

(مثال ص وکاردرکلاس ص ۱۴۱ و تمرین ۹ص ۱۴۲)

مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^2+y^2-2x+4y=4\ ,\ x^2+y^2+2x-4y=9$

☑حل:

الف) مرکز دایره : $O(+1,-2)$, شعاع دایره : $r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4(4)}=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$

مرکز دایره : $O'(-1,2)$, شعاع دایره : $r'=\frac{1}{2}\sqrt{(2)^2+(-4)^2-4(-9)}=\frac{1}{2}\sqrt{56}=\sqrt{14}$

از طرفی $OO'=\sqrt{(1-(-1))^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}\Rightarrow r-r'<OO'<r+r'$

و دو دایره متقاطع هستند.

ب) $(x-2)^2+(y+3)^2=7\ ,\ x^2+(y-5)^2=5$

پ) $x^2+y^2+2x-4y=0\ \ ,\ \ x^2+y^2-2x+4y=0$

ت) $x^2+y^2-2x+4y+1=0\ ,\ (x+1)^2+(y-2)^2=1$

ث) $x^2+y^2-4x+6y+12=0\ ,\ x^2+y^2+6x+8y=0$

(کاردرکلاس ۱ص ۱۴۱و تمرین ۱۰ ص ۱۴۲)

1 معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دایرهٔ

$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y - ۴ = ۰$ مماس بیرون و مرکز آن

نقطهٔ $O(۲,-۲)$ باشد :

10 معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-۱,-۱)$ و با

دایرهٔ مماس درون باشد.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل هفتم

احتمال

❖ درس اول : قانون احتمال کل

مای درس
گـــروه آمـــوزشی عصـــر
www.my-dars.ir

بارم فصل ۷:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
_	۲	۱/۵

فصل ۷ درس ۱: قانون احتمال کل

یادآوری:

۱.پدیده تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش بینی کرد.

۲.فضای نمونه : مجموعه تمام نتایج ممکنِ یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می دهیم .

۳.پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه ای S می نامیم

۴.احتمال وقوع پیشامدیک پیشامد:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

۵.رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع دو پیشامدA وB :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۶. پیشامدهای ناسازگار:

اگر دو پیشامد A و B با هم رخ ندهند $A\cap B=\varnothing$ ، این تساوی به صورت زیر نوشته می شود:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۷.احتمال شرطی :

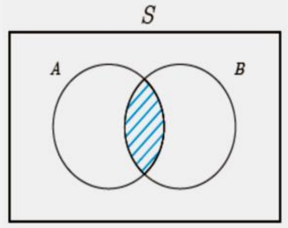
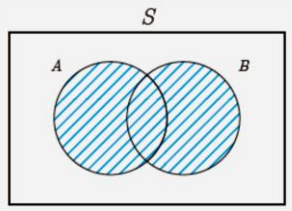
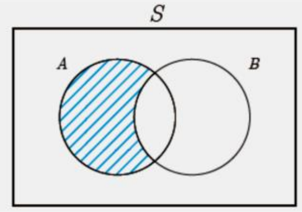
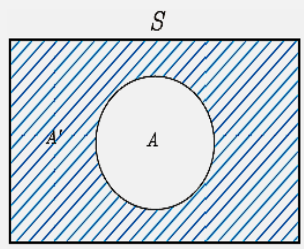
فرض کنیم A و B دو پیشامد باشند به طوریکه $P(A)\neq 0$ در این صورت احتمال وقوع پیشامد A به شرط آنکه بدانیم B رخ داده است را با نماد $P(A|B)$ نمایش می دهیم و داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

۸.پیشامد های مستقل:

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B براحتمال وقوع A تاثیر نگذارد . پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

۹.پیشامدها و اعمال روی آنها:

بیان توصیفی	نمودار ون
اشتراک دو پیشامد: $A\cap B$ وقتی رخ می دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند	
اجتماع دو پیشامد: $A\cup B$ وقتی رخ میدهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامد ها)رخ دهند	
تفاضل دو پیشامد: $A-B$ وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.	
متمم یک پیشامد $A'(A^C)$ وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد. $P(A')=1-P(A)$	

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

افراز(پارل) یک مجموعه:

*افراز یک مجموعه یعنی تبدیل کردن یک مجموعه به زیرمجموعه هایش

*زیرمجموعه های $A_1, A_2, \dots, A_n$ یک افراز روی S درست می کنند به شرطی که:

۱.هیچ یک از زیر مجموعه ها تهی نباشد.

$$A_i \neq \varnothing \quad (1 \le i \le n)$$

۲.هیچ دو زیرمجموعه ای با هم اشتراک نداشته باشند.

$$A_i \cap A_j \neq \varnothing \quad (1 \le i, j \le n)$$

۳.اجتماع همه زیرمجموعه ها مجموعه اولیه شود.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

مثال۱ :مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می دهند.

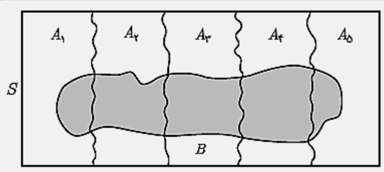
مثال۲ :کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

قانون احتمال کل:

***تعریف عامیانه:** گاهی ممکن است انتخاب های غیر هم جنس داشته باشیم مثل چند ظرف(یاگروه ، کیسه).که باید یکی را به تصادف انتخاب و از داخل آن شیء(یافردی) را خارج کنیم بنابراین اول مسیر انتخاب ظرف(یاگروه ، کیسه)سپس مسیر انتخاب شیء(یافردی)طی می کنیم.برای این کار از نمودار درختی استفاده و اعداد موجود در هر شاخه را ضرب و اگر از شاخه ای به شاخه دیگر برویم اعداد را با هم جمع می کنیم.

***تعریف علمی:** اگر پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ یک افراز روی فضای نمونه ای S درست کرده باشندو B یک پیشامد دلخواه باشد.دراین صورت با توجه به فرمول احتمال شرطی داریم:

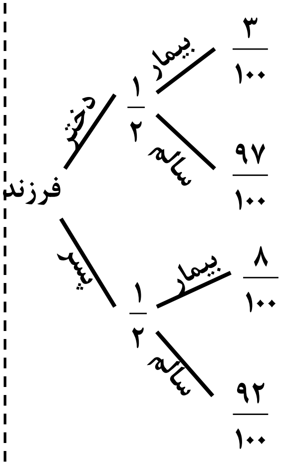
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$



(مثال ص ۱۴۶)

اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳باشد و خانواده ای قصد بچه دار شدن داشته باشد،به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

☑حل:



$$P = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{8}{100}\right) = \frac{11}{200}$$

(مثال ص ۱۴۷)

1 ۴ظرف یکسان داریم .در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است .در ظرف دوم همه مهره ها قرمزند . در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد .با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم .احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

②سامان در یک مسابقه شرکت کرده است .سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد .اگر بسته سؤال های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد .اگر بسته سؤال های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر بسته سؤال های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵درصد برنده خواهد شد .در صورتی که باچرخاندن عقربه چرخان در شکل مقابل نوع سؤال هایی که به او داده می شود مشخص شود تعیین کنیداو به چه احتمالی برنده خواهد شد؟

(مثال ص ۱۴۸)

دو ظرف یکسان داریم .ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره○ سبز و ۷ مهره آبی است .از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می دهیم .سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می کنیم .به چه احتمالی این مهره سبز است؟

(تمرین ص ۱۴۸)

①دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبهٔ دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

②فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به‌ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

③ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

④ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

⑤ مینا در انتخاب رشتهٔ خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشتهٔ ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال اینکه رشتهٔ تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال اینکه رشتهٔ انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

⑥ مدرسهٔ A سه برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم :

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟

ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir